

# 目 录

<b>第一章 集与类</b> .....	1
§ 1.1 集和集的运算.....	1
§ 1.2 集类.....	17
<b>第二章 测度和外测度</b> .....	27
§ 2.1 测度的定义及其基本性质.....	27
§ 2.2 外测度.....	39
§ 2.3 测度的拓展.....	46
§ 2.4 勒贝格-斯提杰 (Lebesgue-Stieltjes) 测度.....	58
<b>第三章 可测函数</b> .....	71
§ 3.1 映射.....	71
§ 3.2 可测函数的定义及其基本性质.....	78
§ 3.3 可测函数列的收敛性.....	89
<b>第四章 积分理论</b> .....	104
§ 4.1 测度有限的集上有界函数的积分.....	104
§ 4.2 测度 $\sigma$ -有限的集上一般可测函数的积分.....	116
§ 4.3 积分的极限定理.....	132
§ 4.4 勒贝格-斯提杰积分.....	139
<b>第五章 乘积空间</b> .....	150

§ 5.1	乘积测度 .....	150
§ 5.2	富比尼(Fubini)定理 .....	163
§ 5.3	二维勒贝格-斯提杰测度与二维勒贝格-斯提杰 积分 .....	171
<b>第六章</b>	<b>广义测度 .....</b>	<b>183</b>
§ 6.1	广义测度的哈恩 (Hahn) 分解和若当(Jordan) 分 解 .....	183
§ 6.2	拉东-尼古丁 (Radon-Nikodym) 定理及其应 用 .....	191
§ 6.3	勒贝格分解定理与定分布函数的分解 .....	202

## 参考书目

# 第一章 集 与 类

## § 1.1 集和集的运算

### 1. 集 的 概 念

集是数学中最基本的概念之一。所谓一个集，就是由一些不论什么样的对象所组成的总体。组成一个集的对象叫做这个集的元素。例如，某个城市的全体居民构成一个集，某图书馆的全部藏书构成一个集，全世界所有的国家构成一个集，等等。数学里也常常碰到各种各样的集，例如，全体自然数的集，直线上所有点的集，等等。

我们用大写字母表示集，用小写字母表示元素。若事物  $a$  是集  $A$  的一个元素，则记为

$$a \in A \text{ (读作“} a \text{ 属于} A \text{”)}$$

若  $a$  不是  $A$  的元素，则记为

$$a \notin A \text{ (读作“} a \text{ 不属于} A \text{”)}$$

例如，设  $N$  是全体自然数的集， $R$  是全体实数的集（除非另有说明，本书中  $N$  与  $R$  恒分别表示这两个集），则

$$\begin{aligned} 1 \in N, \quad \frac{1}{2} \notin N \\ \sqrt{2} \in R, \quad \sqrt{-1} \notin R \end{aligned}$$

由有限个元素所构成的集，称为有限集；由无限多个元素所构成的集称为无限集。

为了方便起见，我们引进空集的概念。不包含任何元素的

集称为空集，并用符号  $\phi$  表示。

例如，设  $A$  是某个班的全体女生的集，如果这个班没有女生，则  $A$  就是空集。

如果集  $A$  与集  $B$  由相同的元素组成，则称  $A$  与  $B$  相等，并记为  $A = B$ 。

例如，设  $A$  是方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的根的集， $B$  是数 1 与 2 所组成的集，则  $A = B$ 。

我们常用以下几种方法表示集：

(1) 在花括号中写出元素的名称或指明元素的范围。

例如，{正整数}，{大于1的实数}，{天津居民} 分别表示由全体正整数，大于1的全体实数和天津的全体居民所构成的集。

(2) 列举法：写出集的所有元素，或按一定的规律写出它的部分元素后加上删节号“...”，并用花括号把它们括起来。

例如，{1, 2, 3} 表示由数 1, 2, 3 所组成的集，这个集也可用 {2, 1, 3}，{3, 1, 2} 等记号表示。由 1 到 100 的所有自然数的集可以表示为 {1, 2, ..., 100}。

所有正偶数的集可以表示为

$$\{2, 4, 6, \dots\}$$

(3) 描述法：在花括号中先写出元素的符号，然后画一竖线，在竖线后面写明元素所满足的条件(或所具有的性质)。例如，

$$\{x | x \in N, 1 \leq x < 4\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\{y | y = n^2 + 1, n \in N, 1 \leq n \leq 3\} = \{2, 5, 10\}$$

$$\{2n | n \in N\} = \{\text{正偶数}\}$$

$$\{x | x \in R, 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$$

$$\{\omega | \omega^2 - 3\omega + 2 = 0\} = \{1, 2\}$$

**定义 1** 如果集合  $A$  的每一个元素都是集合  $B$  的一个元素，则称  $A$  是  $B$  的子集，并记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

(读作“ $B$  包含  $A$ ”或“ $A$  被  $B$  包含”)。

例如，设  $Q$  是全体有理数的集，则

$$N \subset Q, Q \subset R$$

或记为

$$N \subset Q \subset R$$

我们规定空集  $\phi$  是任何集的子集，即对任何  $A$ ， $\phi \subset A$ 。

由以上的定义知， $A = B$  的充要条件是

$$A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

由子集的定义显然有  $A \subset A$ ，即  $A$  是它自身的子集。如果  $A \subset B$ ，而  $B$  中确有元素  $b$  不属于  $A$ ，则称  $A$  是  $B$  的真子集。

必须将以某个对象  $A$  为其仅有的一个元素的集  $\{A\}$  与  $A$  本身区别开来。例如，若  $A = \{1, 2\}$ ，则  $\{A\}$  是仅有一个元素  $A$  的集，而  $A$  是一个有两个元素  $1$  与  $2$  的集。仅有一个元素的集合称为单元集。

在许多问题中，我们所要考虑的集常常是某个给定集的子集，我们称由问题中涉及的全部元素所组成的集为抽象空间（简称空间），并用  $\Omega$  表示。

## 2. 集的运算

**定义 2** 设  $A, B$  是两个集，由  $A$  与  $B$  的所有元素合并在一起所构成的集，称为  $A$  与  $B$  的和集，简称为和，记为  $A \cup B$ ，即

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

由  $A$  与  $B$  的所有公共元素所构成的集称为  $A$  与  $B$  的交集，简称为交，记为  $A \cap B$ ，即

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

$A \cap B$ 也可简记为 $AB$ .

如果 $A$ 与 $B$ 没有公共元素,即 $A \cap B = \phi$ ,则称 $A$ 与 $B$ 互不相交.

例如, 设

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5\}$$

则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

完全类似地可以定义任意个集的和集及交集. 设

$$\{A_t \mid t \in T\}$$

是任意的一组集, 其中 $t$ 是集的指标, 它在某个固定的指标集 $T$ 中变化, 由一切 $A_t (t \in T)$ 的所有元素合并在一起所组成的集称为这组集的和集, 记为 $\bigcup_{t \in T} A_t$ , 即

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{\omega \mid \omega \text{ 至少属于某一个 } A_t, t \in T\}$$

由同时属于每个集 $A_t (t \in T)$ 的所有元素所组成的集称为这组集的交集, 记为 $\bigcap_{t \in T} A_t$ , 即

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{\omega \mid \omega \in A_t \text{ 对每个 } t \in T \text{ 同时成立}\}$$

如果 $T = N$ , 则上述和与交分别称为可列和与可列交, 它们也可记为

$$\bigcup_{n \in N} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n \in N} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

例1 设 $T = [0, +\infty)$ ,  $A_t = [0, t)$ , 则

$$\bigcup_{t \in T} A_t = [0, +\infty), \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \{0\}$$

例2  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = [0, 1], \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] = [0, 1]$

定义3 若集 $A$ 与集 $B$ 互不相交, 则称 $A \cup B$ 为 $A$ 与 $B$ 的



直和，并记之为  $A+B$ 。一般地说，如果对任意的  $s \in T, t \in T$ ，且  $s \neq t$ ，都有  $A_s \cap A_t = \phi$ ，则称  $\bigcup_{t \in T} A_t$  为  $\{A_t | t \in T\}$

这一组集的直和，并记之为  $\sum_{t \in T} A_t$ 。

例 3  $[1,3] \cup [2,4] = [1,3) + [3,4] = [1,4]$

例 4  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1] = \sum_{n=1}^{\infty} [n, n+1) = [1, +\infty)$ 。

由定义易知，和与交的运算具有如下性质：

- (1)  $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ ;
- (2)  $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ ;
- (3)  $A \cup \phi = A, A \cup \Omega = \Omega$ ;
- (4)  $A \cap \phi = \phi, A \cap \Omega = A$ ;
- (5) 等幂律:  $A \cup A = A, A \cap A = A$ ;
- (6) 交换律:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ ;
- (7) 吸收律:  $A \cup (A \cap B) = A,$   
 $A \cap (A \cup B) = A$ ;
- (8) 结合律:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$   
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

前七个性质是显然的，为了证明和的结合律，只须注意  $A \cup (B \cup C)$  与  $(A \cup B) \cup C$  都是由  $A, B, C$  的所有元素合并在一起所构成的集；为了证明交的结合律，只须注意  $A \cap (B \cap C)$  与  $(A \cap B) \cap C$  都是由同时属于  $A, B, C$  的元素所构成的集。

根据结合律，我们可将  $(A \cup B) \cup C$  及  $A \cup (B \cup C)$  中的任一个写为  $A \cup B \cup C$ ，并将  $(A \cap B) \cap C$  及  $A \cap (B \cap C)$  中的任一个写为  $A \cap B \cap C$ 。这种任意省略括号的作法还可以推广到任意多个集的情形上去，并且，根据交换律，还可以交换式中各项的次序。例如

$$\begin{aligned}
B \cap D \cap A \cap C &= (B \cap D \cap A) \cap C \\
&= (A \cap B \cap D) \cap C \\
&= (A \cap B) \cap (D \cap C) \\
&= (A \cap B) \cap (C \cap D) \\
&= A \cap B \cap C \cap D
\end{aligned}$$

从交的意义上看,上式也是很明显的,因为无论是  $B \cap D \cap A \cap C$  或  $A \cap B \cap C \cap D$  都是由  $A, B, C, D$  的共同元素所构成的集.

**定理 1** 下面三个关系

- (1)  $A \subset B$ ;
- (2)  $A \cap B = A$ ;
- (3)  $A \cup B = B$ .

是等价的,这就是说,如果它们中间的任何一个成立,则它们三个都成立.

在以下的证明中,记号“ $\Rightarrow$ ”表示“推出”,如果  $p$  与  $q$  是两个命题,则  $p \Rightarrow q$  表示由  $p$  可推出  $q$ .

证 (1)  $\Rightarrow$  (2): 设  $A \subset B$ . 因为对任何  $A, B$ , 都有  $A \cap B \subset A$ , 故要证明 (2) 只需证明  $A \subset A \cap B$ . 如果  $x \in A$ , 则  $x \in B$ , 故  $x \in A \cap B$ , 从而  $A \subset A \cap B$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): 设  $A \cap B = A$ . 因为对任何  $A, B$ , 有  $B \subset A \cup B$ , 故要证明 (3) 成立, 只需证明  $A \cup B \subset B$ . 如果  $x \in A \cup B$ , 则  $x \in A$  或  $x \in B$ , 在前一种情况, 由 (2) 有  $x \in A \cap B$ , 故仍有  $x \in B$ , 于是  $A \cup B \subset B$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): 设  $A \cup B = B$ . 则由此式及  $A \subset A \cup B$  即得  $A \subset B$ .

**定理 2 (第一分配律)** 设  $A, B, C$  是三个集, 则  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

在以下证明中“ $\Leftrightarrow$ ”表示“等价”.  $p \Leftrightarrow q$  则表示命



题  $p$  与命题  $q$  等价.

$$\text{证 } \omega \in A \cap (B \cup C) \iff \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B \cup C$$

$$\iff \omega \in A, \text{ 且 } \omega \in B \text{ 或 } \omega \in C$$

$$\iff \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B, \text{ 或 } \omega \in A \text{ 且 } \omega \in C$$

$$\iff \omega \in A \cap B, \text{ 或 } \omega \in A \cap C$$

$$\iff \omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**定义 4** 设  $\Omega$  是一空间,  $A \subset \Omega$ , 则  $\Omega$  中不属于  $A$  的所有元素所构成的集称为  $A$  的补集 (简称补), 记为  $A'$ , 即

$$A' = \{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ 且 } \omega \notin A\}$$

补运算显然具有下列性质:

(1) 互补性:  $A \cup A' = \Omega, A \cap A' = \phi, \phi' = \Omega, \Omega' = \phi.$

(2) 对合律:  $(A')' = A.$

(3)  $A \subset B$  的充要条件是  $A' \supset B'.$

**定理 3** (德·莫根(De Morgan)律) 设  $A, B$  是两个集, 则

(1)  $(A \cup B)' = A' \cap B';$

(2)  $(A \cap B)' = A' \cup B'.$

**证** (1)  $\omega \in (A \cup B)' \iff \omega \notin A \cup B$

$$\iff \omega \notin A \text{ 且 } \omega \notin B \iff \omega \in A' \text{ 且 } \omega \in B'$$

$$\iff \omega \in A' \cap B'$$

$$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$$

(2)  $\omega \in (A \cap B)' \iff \omega \notin A \cap B$

$$\iff \omega \notin A \text{ 或 } \omega \notin B \iff \omega \in A' \text{ 或 } \omega \in B' \iff$$

$$\omega \in A' \cup B'$$

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$$

**定理 4** (第二分配律) 设  $A, B, C$  是三个集, 则

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证 把第一分配律的公式中的  $A, B, C$  分别换为  $A', B', C'$ , 我们有

$$A' \cap (B' \cup C') = (A' \cap B') \cup (A' \cap C')$$

两边取补

$$[A' \cap (B' \cup C')] = [(A' \cap B') \cup (A' \cap C')]'$$

利用德·莫根律及对合律得

$$A \cup (B' \cup C')' = (A' \cap B')' \cap (A' \cap C')'$$

再次利用这两个运算律即得

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

以上三个定律可以推广到一般情况。

第一分配律:

$$A \cap \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad (1.1)$$

第二分配律:

$$A \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad (1.2)$$

德·莫根律:

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)' = \bigcap_{i \in I} A_i' \quad (1.3)$$

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)' = \bigcup_{i \in I} A_i' \quad (1.4)$$

定义 5 设  $A, B$  是两个集, 属于  $A$  而不属于  $B$  的所有元素所组成的集称为  $A$  与  $B$  的差, 记为  $A - B$ .

例如, 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 5\}$ , 则

$$A - B = \{1, 3\}, B - A = \{5\}$$

由差的定义显然有

$$A - B = A \cap B'$$

$$\Omega - A = A'$$

注意, 在差的定义中并不要求  $B$  是  $A$  的子集. 如果  $B \subset A$ , 则称  $A - B$  为真差。

**定理 5** 设  $A, B$  是两个集, 则

$$A \cup B = A + (B - A) = A + A' \cap B$$

$$\begin{aligned} \text{证 (1)} \quad A \cap (B - A) &= A \cap (A' \cap B) \\ &= (A \cap A') \cap B \\ &= \phi \cap B \\ &= \phi \end{aligned}$$

$\therefore A$  与  $B - A$  互不相交.

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad A + (B - A) &= A \cup (A' \cap B) \\ &= (A \cup A') \cap (A \cup B) \\ &= \Omega \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

上述公式可以推广如下: 设  $\{A_n\}$  是一列集, 令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A'_1 \cdots A'_{n-1} A_n \quad (n \geq 2)$$

则

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k \quad (1.5)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \quad (1.6)$$

**定理 6** 设  $A, B, C$  是三个集, 则

$$C \cap (A - B) = (C \cap A) - (C \cap B)$$

即交关于差是可分配的.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (C \cap A) - (C \cap B) &= (C \cap A) \cap (C \cap B)' \\ &= (C \cap A) \cap (C' \cup B') \\ &= (C \cap A \cap C') \cup (C \cap A \cap B') \\ &= \phi \cup (C \cap A \cap B') \\ &= C \cap (A - B) \end{aligned}$$

定义6 设  $A, B$  是两个集, 则称  $(A - B) \cup (B - A)$  为  $A$  与  $B$  的对称差, 记为  $A \Delta B$ .

显然有

$$(1) A \Delta B = (A - B) + (B - A);$$

$$(2) A \cup B = (A \Delta B) + (A \cap B).$$

### 3. 上限集与下限集

定义7 设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是任意一列集. 由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集的上限集, 记为  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ ; 而由属于集列中从某个指标  $n_0(\omega)$

(这个指标不是固定的, 而是与元素  $\omega$  有关) 以后所有集  $A_n$  的那种元素  $\omega$  (即除去有限多个集外的所有集  $A_n$  都含有的那种元素) 的全体所组成的集称为这一列集的下限集, 记为  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ . 即

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \mid \omega \text{ 属于无限多个 } A_n\}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \mid \text{存在正整数 } n_0(\omega), \text{ 使得当 } n > n_0(\omega)$$

时,  $\omega \in A_n\}$

由定义显然有,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$$

例1 设  $A_{2n-1} = A, A_{2n} = B (n = 1, 2, \dots)$ , 则

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cup B;$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cap B.$$

证 (1) 设  $\omega \in A \cup B$ , 不妨设  $\omega \in A$ , 于是有

$$\omega \in A_{2n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由上限集的定义知,  $\omega \in \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ , 故有

$$A \cup B \subset \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \quad (1.7)$$

另一方面, 设  $\omega \in (A \cup B)'$ , 即  $\omega \notin A \cup B$ , 于是  $\omega \notin A$  且  $\omega \notin B$ , 故  $\omega \notin A_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 因而  $\omega \notin \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ , 即  $\omega \in \left( \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right)'$ , 于是有

$$(A \cup B)' \subset \left( \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right)'$$

即

$$A \cup B \supset \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \quad (1.8)$$

由 (1.7) 与 (1.8) 即得

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = A \cup B$$

(2) 设  $\omega \in A \cap B$ , 则  $\omega \in A$  且  $\omega \in B$ , 于是  $\omega \in A_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 由下限集的定义知,  $\omega \in \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ , 故有

$$A \cap B \subset \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \quad (1.9)$$

另一方面, 设  $\omega \in (A \cap B)'$ , 即  $\omega \notin A \cap B$ , 不妨设  $\omega \notin A$ , 即  $\omega \notin A_{2n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 因而  $\omega \notin \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ , 即  $\omega \in \left( \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right)'$ , 于是有

$$(A \cap B)' \subset \left( \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right)'$$

即

$$(A \cap B) \supset \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \quad (1.10)$$

由 (1.9) 与 (1.10) 即得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cap B$$

例 2 设  $A_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  是如下一列点集:

$$A_{2n+1} = \left[ 0, 2 - \frac{1}{n+1} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_{2n} = \left[ 0, 1 + \frac{1}{n} \right], n = 1, 2, 3, \dots$$

我们来确定集列  $\{A_n\}$  的上限集和下限集.

因为闭区间  $[0, 1]$  中的点属于每个  $A_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 故

$$[0, 1] \subset \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$$

对于区间  $(1, 2]$  中的每个点  $x$ , 必存在正整数  $n_0(x)$ , 使得当  $n > n_0(x)$  时,

$$x > 1 + \frac{1}{n}, \text{ 即 } x \notin A_{2n}$$

又区间  $[0, 2]$  以外的点都不属于任何  $A_n$ , 因此

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1]$$

对于区间  $(1, 2)$  中的每个点  $x$ , 必存在正整数  $n_0(x)$ , 使得当  $n > n_0(x)$  时,

$$x < 2 - \frac{1}{n+1}, \text{ 即 } x \in A_{2n+1}$$

又点  $x = 2$  仅属于  $A_2$ , 因此,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2)$$

定理 7 设  $\{A_n\}$  是任意一列集, 则

$$(1) \left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right)' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n' \quad (1.11)$$

$$(2) \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right)' = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n' \quad (1.12)$$



证 (1)

$$\begin{aligned} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right)' &= \{ \omega \mid \text{有无限多个 } A_n \text{ 不含 } \omega \} \\ &= \{ \omega \mid \omega \text{ 属于无限多个 } A_n' \} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n' \end{aligned}$$

(1.12) 可以类似地证明。

定理 8 设  $\{A_n\}$  是任意一列集, 则

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad (1.13)$$

$$(2) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad (1.14)$$

证 (1)  $\omega \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \iff$  对于所有的  $n$ , 存在

$k \geq n$ , 使  $\omega \in A_k \iff$  对于所有的  $n$ ,

$$\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$(2) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \left[ \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right)' \right]' = \left[ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n' \right]'$$

$$= \left[ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k' \right]' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k' \right]'$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

定义 8 如果集列  $\{A_n\}$  的上限集和下限集相等, 即

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$$

则称集列  $\{A_n\}$  收敛, 这时称  $A = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  为集列  $\{A_n\}$

的极限 (或极限集), 记为

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

例如，上面例 1 中的集列收敛的充要条件是

$$A \cup B = A \cap B$$

即  $A = B$ 。

**定义 9** 设  $\{A_n\}$  是一集列，如果

$$A_n \subset A_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

则称  $\{A_n\}$  是单调增加集列，并记为  $A_n \uparrow$ ；如果

$$A_n \supset A_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

则称  $\{A_n\}$  是单调减少集列，并记为  $A_n \downarrow$ ，单调增加和单调减少集列统称为单调集列。

关于单调集列下面的定理显然成立。

**定理 9** 单调集列都是收敛的，且

如果  $A_n \uparrow$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (1.15)$$

如果  $A_n \downarrow$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad (1.16)$$

在  $\{A_n\}$  单调增加的情况，(1.15) 可简记为  $A_n \uparrow A$ ，其中  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ；在  $\{A_n\}$  单调减少的情况，(1.16) 可简记为

$A_n \downarrow A$ ，其中  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 。

**例 3** 设

$$A_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad B_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] = [0, 1]$$

### 习 题 1.1

1. 证明下列关于集的等式.

- (1)  $A \cap (A - B) = A - B,$
- (2)  $A - (A - B) = A \cap B,$
- (3)  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C),$
- (4)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C),$
- (5)  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$
- (6)  $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B),$
- (7)  $(A \cup B) \cup (B - A) = A \cup B,$
- (8)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C),$
- (9)  $A - (B \cup C) = (A - B) - C,$
- (10)  $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C,$
- (11)  $A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B \cap C),$
- (12)  $(A \cup B) \cap (A' \cup C) = (A \cap C) \cup (A' \cap B),$
- (13)  $[(A \cap C) \cup (B \cap C')]' = (A' \cap C) \cup (B' \cap C'),$
- (14)  $[(A \cup C) \cap (B \cup C')]' = (A' \cup C) \cap (B' \cup C'),$
- (15)  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B),$
- (16)  $A' \Delta B' = A \Delta B,$
- (17)  $C \cap (A \Delta B) = (C \cap A) \Delta (C \cap B),$
- (18)  $(A \cap B) \cup (A' \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A' \cap C).$

2. 证明:

- (1)  $\bigcup_{i \in T} A_i - A = \bigcup_{i \in T} (A_i - A),$
- (2)  $\bigcap_{i \in T} A_i - A = \bigcap_{i \in T} (A_i - A),$
- (3)  $A - \bigcup_{i \in T} A_i = \bigcap_{i \in T} (A - A_i),$
- (4)  $A - \bigcap_{i \in T} A_i = \bigcup_{i \in T} (A - A_i).$

3. 设  $\{A_i\}$  是单调减少集列, 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

4. 设  $\{A_k\}$  是任意集列, 证明

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

5. 设  $\{x_n\}$  是一列实数, 令  $A_n = (-\infty, x_n)$ , 问  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$  与  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$  之间有何关系 (类似地考虑下极限和下限集之间的关系)?

6. 设  $A_n$  是坐标平面上以点  $(\frac{(-1)^n}{n}, 0)$  为中心, 半径为 1 的圆的内部, 求  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$  与  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ .

7. 设  $A_{3n} = A$ ,  $A_{3n-1} = B$ ,  $A_{3n-2} = C$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 求集列  $\{A_n\}$  的上限集和下限集.

8. 设  $A_{2n-1} = (0, \frac{1}{n})$ ,  $A_{2n} = (0, n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 求集列  $\{A_n\}$  的上限集和下限集.

9. 设  $A_{2n-1} = (\frac{1}{n}, 1)$ ,  $A_{2n} = (0, 1 + \frac{1}{n})$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 求集列  $\{A_n\}$  的上限集和下限集.

10. 设  $\{A_n\}$  与  $\{B_n\}$  是任意集列, 证明

$$(1) \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \cup \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} B_n},$$

$$(2) \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)} \supset \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \cup \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} B_n},$$

$$(3) \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)} \subset \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \cap \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} B_n},$$

$$(4) \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)} \subset \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \cap \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} B_n}.$$

11. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  存在,  $B$  是任意一个集, 证明

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - B,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (B - A_n) = B - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

12. 设  $\{A_n\}$  是任意集列,  $B$  是任意一个集, 证明

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup B,$$

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap B,$$

$$(3) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B) = (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup B,$$

$$(4) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B) = (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap B.$$

## § 1.2 集 类

以某个固定的空间  $\Omega$  的某些子集为元素的集称为集类, 简称类. 集类用草写字母  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{F}$  等表示, 例如  $\Omega$  的子集的全体就是一个类.

设  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的某些子集所组成的一个类,  $A$  是  $\Omega$  的一个固定子集, 则记号

$$\mathcal{F} \cap A$$

表示由一切形如  $E \cap A$  的集组成的类, 其中  $E \in \mathcal{F}$ .

**定义 1** 设  $\Omega$  是一个空间,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的某些子集所组成的非空类, 如果对于任何  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$ , 都有

$$A \cup B \in \mathcal{F}$$

则称  $\mathcal{F}$  对和运算是封闭的.

如果对于任何  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$ , 都有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

则称  $\mathcal{F}$  对可列和运算是封闭的.

集类对交、可列交、差、补等运算的封闭性可以完全类似地定义.

**定义 2** 设  $\Omega$  是一个空间,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的某些子集组成的非

空类，如果 $\mathcal{S}$ 对和与差运算均封闭，则称 $\mathcal{S}$ 是一个环。特别如果又有 $\Omega \in \mathcal{S}$ ，则称 $\mathcal{S}$ 是一个代数。

下面举几个环的例子。

例1 只包含一个空集的单元类 $\{\phi\}$ 是一个环。

例2  $\Omega$ 的一切子集所组成的类 $\mathcal{S}$ 是一个代数。

例3  $\Omega$ 的有限子集（包括空集 $\phi$ ）的全体组成的类 $\mathcal{S}$ 是一个环。

例4 设 $\Omega$ 是一无限集，则 $\Omega$ 的有限子集（包括空集 $\phi$ ）及可列子集的全体所组成的类 $\mathcal{S}$ 是一个环，当 $\Omega$ 本身是可列集时， $\mathcal{S}$ 是一个代数。

例5 设 $R$ 是全体实数， $\mathcal{S}$ 是由有限个左开右闭的有限区间的和集 $E = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$ 的全体所组成的类，则 $\mathcal{S}$ 是一个环。

下面验证这一事实。首先注意空集 $\phi$ 可以看成是区间 $(a, a]$ ，因而它是 $\mathcal{S}$ 中的元素。易知任何两个左开右闭的区间 $(a, b], (c, d]$ 的差集只可能有三种情况：或者是空集，或者是一个左开右闭的区间，或者是两个不相交的左开右闭区间的和集，于是由集代数的公式（参见§1.1的习题2）

$$\bigcup_{k=1}^n A_k - A = \bigcup_{k=1}^n (A_k - A)$$

$$A - \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (A - A_k)$$

及第一分配律可知， $\mathcal{S}$ 中的任两个集的差都可用有限个左开右闭区间的和来表示，因而是 $\mathcal{S}$ 的元素，故 $\mathcal{S}$ 对差运算封闭。 $\mathcal{S}$ 对和运算的封闭性是显然的。因此 $\mathcal{S}$ 是环。

显然 $\mathcal{S}$ 中的元素都可以表成有限个两两不相交的左开右闭的区间的和，但表示法不唯一。



例 6 设  $\Omega$  是二维欧氏空间, 当  $a \leq b, c \leq d$  时, 称

$$E = \{(x, y) \mid a < x \leq b, c < y \leq d\}$$

为  $\Omega$  中的左下开右上闭的矩形, 仿照上例可证, 由有限个左下开右上闭矩形的和集的全体所组成的类  $\mathcal{F}$  是一个环.

易知环具有以下性质:

(1) 空集  $\phi$  是任何环的元素;

(2) 环对有限和运算封闭, 即对于环  $\mathcal{F}$  中的任意有限个元素  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , 和集  $\bigcup_{k=1}^n E_k$  也属于  $\mathcal{F}$ ;

(3) 代数对补运算封闭;

(4) 环对有限交运算封闭.

前三个性质可直接由环和代数的定义推出, 第四个性质由集代数的公式

$$A \cap B = (A \cup B) - (A - B) - (B - A)$$

及环的定义即可推出.

引理 1 设  $T$  是非空参数集, 如果对每个  $t \in T$ , 集类  $\mathcal{F}_t$  都对某运算封闭, 则集类  $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$  也对这个运算封闭.

证 我们仅就二元运算 (下面用符号 “ $\circ$ ” 表示这种运算) 的情况来叙述, 其它运算 (例如可列和、可列交和补等) 情况与此类似.

设对每个  $t \in T$ ,  $\mathcal{F}_t$  对运算 “ $\circ$ ” 封闭. 设  $A, B \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ , 则对每个  $t \in T, A, B \in \mathcal{F}_t$ , 因为  $\mathcal{F}_t$  对 “ $\circ$ ” 封闭, 所以  $A \circ B \in \mathcal{F}_t$ , 故  $A \circ B \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ , 即  $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$  对 “ $\circ$ ” 封闭.

定理 1 设  $\mathcal{A}$  是由空间  $\Omega$  的某些子集所成的类, 则必定有唯一的环  $\mathcal{F}$ , 使得

(1)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ ,

(2) 对于任何包含  $\mathcal{A}$  的环  $\mathcal{F}_1$  都有  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ .

以上性质表明,  $\mathcal{F}$  是包含  $\mathcal{A}$  的最小环, 我们称它为由  $\mathcal{A}$  产生的环, 记之为  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ .

证 因为由  $\Omega$  的一切子集所组成的类是一个环, 这就说明了至少有一个包含  $\mathcal{A}$  的环存在. 此外, 由引理 1 知, 任意多个环的交仍是一个环. 于是容易看出, 包含  $\mathcal{A}$  的一切环之交就是我们所要求的环  $\mathcal{F}$ .

例 7 设  $\Omega$  是一个空间,  $\mathcal{A}$  是由  $\Omega$  的单元集全体所组成的类, 则  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  就是由  $\Omega$  的有限子集 (包括空集) 的全体所组成的环 (见例 3).

例 8 令  $\mathcal{A}$  表示实数轴上左开右闭区间  $(a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ) 的全体所组成的类, 则  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  就是前面例 5 中的环.

定义 3 设  $\Omega$  是一个空间,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的某些子集所组成的非空类, 如果  $\mathcal{F}$  对差及可列和运算都封闭, 则称  $\mathcal{F}$  是一个  $\sigma$ -环, 如果又有  $\Omega \in \mathcal{F}$ , 则称  $\mathcal{F}$  是一个  $\sigma$ -代数或波莱尔 (Borel) 体.

前面例 1, 2, 4 中的环都是  $\sigma$ -环, 例 5, 6 中的环都不是  $\sigma$ -环, 当  $\Omega$  是有限集时, 例 3 中的环是  $\sigma$ -环, 如果  $\Omega$  是无限集, 则这个环不是  $\sigma$ -环.

易知  $\sigma$ -环具有以下性质:

- (1) 空集  $\phi$  属于任何  $\sigma$ -环,
- (2)  $\sigma$ -环必是环,
- (3)  $\sigma$ -环对可列交运算是封闭的.

前两个性质可直接由环的定义推出. 第三个性质可由等式

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} (E - E_n)$$

推出，式中  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 。

**例 9**  $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\}$  是  $\sigma$ -代数。因为任何代数都含有  $\Omega$  与  $\phi$ ，故  $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\}$  是以  $\Omega$  为空间的最小  $\sigma$ -代数（也是以  $\Omega$  为空间的最小的代数）。 $\Omega$  的一切子集所组成的类则是以  $\Omega$  为空间的最大  $\sigma$ -代数。

**定理 2** 设  $\mathcal{A}$  是由空间  $\Omega$  的某些子集所组成的类，则必定有唯一的  $\sigma$ -环  $\mathcal{F}$ ，使得

$$(1) \mathcal{A} \subset \mathcal{F},$$

$$(2) \text{ 对于任何包含 } \mathcal{A} \text{ 的 } \sigma\text{-环 } \mathcal{F}_1 \text{ 都有 } \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1.$$

以上性质表明， $\mathcal{F}$  是包含  $\mathcal{A}$  的最小  $\sigma$ -环，我们称它为  $\mathcal{A}$  产生的  $\sigma$ -环，记之为  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ 。

**证** 仿照定理 1 的证明可知，包含  $\mathcal{A}$  的一切  $\sigma$ -环的交就是所求的  $\sigma$ -环  $\mathcal{F}$ 。

同理，存在包含  $\mathcal{A}$  的最小  $\sigma$ -代数，它就是包含  $\mathcal{A}$  的一切  $\sigma$ -代数的交，我们用记号  $\sigma(\mathcal{A})$  来表示。

**例 10** 设  $\Omega$  是一可列集， $\mathcal{A}$  是由  $\Omega$  的单元集的全体所组成的类，则  $\sigma(\mathcal{A})$  是  $\Omega$  的一切子集所组成的类。

**例 11** 设  $\Omega$  是一空间， $A \subset \Omega$ ， $\mathcal{A} = \{A\}$  是一个单元类，则  $\sigma(\mathcal{A}) = \{\Omega, \phi, A, A'\}$ 。

**定义 4** 设  $\Omega = (-\infty, +\infty)$ ， $\mathcal{A}$  是所有左开右闭的有限区间所组成的类，即

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \mid -\infty < a < b < +\infty\}$$

则称  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  中的集为波莱尔集。波莱尔集的全体有时也记为  $\mathcal{B}$ 。显然  $\Omega \in \mathcal{B}$ ，即  $\mathcal{B}$  是  $\sigma$ -代数，因此有  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ 。

设  $\mathcal{F}$  是由有限个左开右闭的有限区间的和集的全体所组成的类（见例 5），则显然有

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{F})$$

(参看例 8)。

**定义 5** 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所组成的类, 如果对于  $\mathcal{F}$  中任何一个单调集列  $\{A_n\}$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{F}$$

则称  $\mathcal{F}$  是一单调类。

**定理 3** 设  $\mathcal{A}$  是  $\Omega$  的某些子集所成的类, 则必定有唯一的单调类  $\mathcal{F}$ , 使得

$$(1) \mathcal{A} \subset \mathcal{F},$$

(2) 对于包含  $\mathcal{A}$  的任何单调类  $\mathcal{F}_1$  都有

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$$

以上性质表明,  $\mathcal{F}$  是包含  $\mathcal{A}$  的最小单调类, 我们称它为由  $\mathcal{A}$  产生的单调类, 记之为  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 。

**证** 仿照定理 1 的证明可知, 包含  $\mathcal{A}$  的一切单调类的交就是所求的单调类  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 。

**定理 4**  $\sigma$ -环必是单调类, 单调环必是  $\sigma$ -环。

**证** 设  $\mathcal{F}$  是一  $\sigma$ -环,  $\{A_n\}$  是一单调集列, 且  $A_n \in \mathcal{F}$ , 由于  $\mathcal{F}$  封闭于可列和运算, 故当  $\{A_n\}$  单调增加时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

由于  $\mathcal{F}$  封闭于可列交运算, 故当  $\{A_n\}$  单调减少时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

于是就证明了  $\mathcal{F}$  是单调类。

现在设  $\mathcal{F}$  是个单调环, 即  $\mathcal{F}$  是单调类, 也是一个环。要证明  $\mathcal{F}$  是  $\sigma$ -环, 只要证明  $\mathcal{F}$  对可列和封闭。设  $A_n \in \mathcal{F}$

$(n=1, 2, \dots)$ , 记  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , 由于  $\mathcal{F}$  是环, 故  $B_n \in \mathcal{F}$ ,

因为  $\{B_n\}$  单调上升, 而  $\mathcal{F}$  是一单调类, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \in \mathcal{F}$ .

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

故  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ , 因此  $\mathcal{F}$  对可列和运算是封闭的, 于是我们就证明了  $\mathcal{F}$  是  $\sigma$ -环.

**引理 2** 设  $\Omega$  是一空间,  $\mathcal{A}$  是  $\Omega$  的某些子集所组成的单调类, 对于任何集  $A \subset \Omega$ , 记

$$\mathcal{N}(A) = \{B \mid B \subset \Omega, \text{ 且 } A-B, B-A, A \cup B \text{ 都属于 } \mathcal{A}\}$$

则  $\mathcal{N}(A)$  是一个单调类.

**证** 设  $\{B_n\}$  是  $\mathcal{N}(A)$  中任一单调集列, 则

$A - B_n \in \mathcal{A}$ ,  $B_n - A \in \mathcal{A}$ ,  $A \cup B_n \in \mathcal{A}$  显然集列  $\{A - B_n\}$ ,  $\{B_n - A\}$ ,  $\{A \cup B_n\}$  都是单调的, 因为  $\mathcal{A}$  是单调类, 故上述三个序列的极限都属于  $\mathcal{A}$ , 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - B_n) = A - \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n - A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A \cup B_n) = A \cup \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

(参看习题 1.1 第 11 题与第 12 题), 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \in \mathcal{N}(A)$ , 这

就说明  $\mathcal{N}(A)$  是单调类.

**引理 3** 设  $\Omega$  是一空间,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的某些子集所组成的环, 则  $\mathcal{N}(\mathcal{F})$  是环.

**证** 对于任何集  $A \subset \Omega$ , 记

$$\mathcal{N}(A) = \{B \mid B \subset \Omega, \text{ 且 } A-B, B-A, A \cup B \text{ 都属于 } \mathcal{F}\}$$



$(\mathcal{F})$  }

由于  $\mathcal{N}(A)$  的定义中  $A$  和  $B$  的地位是对称的, 故  $B \in \mathcal{N}(A)$  与  $A \in \mathcal{N}(B)$  等价. 由于  $\mathcal{F}$  是环, 故对于任何  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$ , 必有  $B \in \mathcal{N}(A)$ , 故  $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}(A)$ . 而由引理 2 知  $\mathcal{N}(A)$  是单调类, 故  $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{N}(A)$ , 即对于  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$  有

$$B \in \mathcal{N}(A), \text{ 即 } A \in \mathcal{N}(B)$$

因此当  $B \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$  时, 有

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{N}(B)$$

由于  $\mathcal{N}(B)$  是单调类, 故得  $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{N}(B)$ , 这就是说, 对于任何  $A \in \mathcal{M}(\mathcal{F}), B \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ , 都有  $A \in \mathcal{N}(B)$ , 而由  $\mathcal{N}(B)$  的定义, 这就是  $A - B, B - A, A \cup B$  都属于  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ , 即  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  对和与差运算封闭, 因而是一个环.

**定理 5** 设  $\mathcal{F}$  是由空间  $\Omega$  的某些子集所组成的环, 则

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$$

**证** 因为  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  是包含  $\mathcal{F}$  的  $\sigma$ -环, 由定理 4 知它是单调类, 但  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  是包含  $\mathcal{F}$  的最小单调类, 故

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{F})$$

又由引理 3 知,  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  是环, 因而它是单调环, 于是由定理 4 知它是  $\sigma$ -环, 但  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  是包含  $\mathcal{F}$  的最小  $\sigma$ -环, 故而

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$$

于是  $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$  得证.

**推论** 设  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{F}$  都是由  $\Omega$  的某些子集所组成的类, 如果  $\mathcal{A}$  是单调类,  $\mathcal{F}$  是环, 而且  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ , 则

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$$

**证** 由假设  $\mathcal{A}$  是包含环  $\mathcal{F}$  的单调类, 故  $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ . 又由定理 5,  $\mathcal{M}(\mathcal{F}) = \mathcal{S}(\mathcal{F})$ . 所以,  $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ .



## 习 题 1.2

1. 设 $\mathcal{F}$ 是由有限个左闭右开的有限区间的和集的全体所组成的类, 则 $\mathcal{F}$ 是一个环.

2. 设 $\mathcal{F}$ 是由有限个端点为有理数的左开右闭的有限区间的和集的全体所组成的类,  $\mathcal{F}$ 是否为环?

3. 由有限个开区间的和集的全体所组成的类是否为环? 由有限个闭区间的和集的全体所成的类是否为环?

4. 设 $\mathcal{F}$ 是由有限个区间(包括开的、闭的、半开半闭的)的和集的全体所组成的类, 则 $\mathcal{F}$ 是否为一个环?

5. 设 $\Omega$ 是一空间,  $\mathcal{A}$ 是 $\Omega$ 的某些子集所成的类, 求 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ .

(1)  $\mathcal{A} = \{A\}$ ;

(2)  $\mathcal{A} = \{A, B\}$ ;

(3)  $A$ 是 $\Omega$ 的一个固定子集,  $\mathcal{A}$ 是由包含 $A$ 的一切集所成的类,

即

$$\mathcal{A} = \{B \mid A \subset B \subset \Omega\}$$

(4)  $\mathcal{A}$ 是恰好包含 $\Omega$ 中两个不同元素的一切集所组成的类.

6. 设 $\Omega$ 是实直线, 求 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ :

(1)  $\mathcal{A}$ 是 $\Omega$ 中一切有限开区间所组成的类;

(2)  $\mathcal{A}$ 是 $\Omega$ 中一切有限闭区间所组成的类;

(3)  $\mathcal{A}$ 是 $\Omega$ 中一切形如 $(-\infty, a)$ 的区间所组成的类;

(4)  $\mathcal{A}$ 是 $\Omega$ 中一切形如 $(a, +\infty)$ 的区间所组成的类.

7. 设 $\Omega$ 是不可列集,  $\mathcal{F}$ 是一个类, 它的元素 $E \subset \Omega$ 是有限或可列集, 或是以有限或可列集为补集的集, 则 $\mathcal{F}$ 是一个 $\sigma$ -代数.

8. 设 $\mathcal{F}$ 是空间 $\Omega$ 的某些子集所组成的类, 证明 $\mathcal{F}$ 为环的充要条件是:

(1) 对有限直和运算封闭;

(2) 对差运算封闭.

9. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma$ -环, 如果 $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{F}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{F}$$

10. 设 $\mathcal{A}$ 是一个环,

$$\mathcal{F} = \{A \mid \text{或 } A \in \mathcal{A}, \text{ 或 } A' \in \mathcal{A}\}$$

则  $\mathcal{F}$  是一个代数.

11. 设  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的某些子集组成的类, 则  $\mathcal{F}$  是  $\sigma$ -代数的充要条件是.

(1)  $\mathcal{F}$  对可列和运算封闭;

(2)  $\mathcal{F}$  对补运算封闭.

12. 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所组成的非空类, 如果  $\mathcal{F}$  对交运算封闭, 则称  $\mathcal{F}$  为  $\pi$ -类. 证明实直线上所有有限的左开右闭区间的全体所构成的类是  $\pi$ -类.

13. 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所组成的非空类, 如果

(1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;

(2) 对直和与真差运算封闭;

(3) 如果  $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ , 且  $\{A_n\}$  单调增加, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{F}$$

则称  $\mathcal{F}$  为  $\lambda$ -类. 证明集类为  $\sigma$ -代数的充要条件是它既是  $\lambda$ -类又是  $\pi$ -类.

14. 在适当的空间中构造一个集类  $\mathcal{F}$ , 使  $\mathcal{F}$  是  $\sigma$ -环但不是  $\sigma$ -代数, 并使得  $\mathcal{F}$  中所有集的和是整个空间.

15. 设  $\mathcal{A}$  是  $\Omega$  的某些子集所组成的任意集类,  $A$  是  $\Omega$  的任意子集, 则

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) \cap A = \mathcal{S}(\mathcal{A} \cap A)$$

16. 设  $\Omega = (-\infty, +\infty)$ , 令

$$\mathcal{A}_1 = \{(a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_4 = \{(-\infty, a) \mid -\infty < a < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_5 = \{(-\infty, a) \mid -\infty < a < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_6 = \{(a, +\infty) \mid -\infty < a < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_7 = \{(a, +\infty) \mid -\infty < a < +\infty\}$$

$$\mathcal{A}_8 = \{\Omega \text{ 中的开集}\}$$

$$\mathcal{A}_9 = \{\Omega \text{ 中的闭集}\}$$

证明

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = \mathcal{B} \quad (k = 1, 2, \dots, 9)$$

## 第二章 测度和外测度

### § 2.1 测度的定义及其基本性质

**定义1** 设 $\mathcal{S}$ 是一个集类, 如果对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个集 $E$  (即 $\mathcal{S}$ 的一个元素) 都有一个数 $P(E)$ 与之对应, 那末我们称 $P$ 是定义在 $\mathcal{S}$ 上的一个集函数.

我们允许集函数 $P$ 的值可以是无限的, 但它们要有一定的符号, 为此我们引用“非正真”的数 $+\infty$ 和 $-\infty$ , 并规定它们的运算法则及它们和任何实数 $x$ 的关系如下:

$$\begin{aligned} +\infty \pm x &= +\infty + (+\infty) \\ &= +\infty - (-\infty) = +\infty \\ -\infty \pm x &= -\infty + (-\infty) \\ &= -\infty - (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

若 $x > 0$ , 则

$$\begin{aligned} (+\infty)x &= x(+\infty) = +\infty \\ (-\infty)x &= x(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

若 $x < 0$ , 则

$$\begin{aligned} (+\infty)x &= x(+\infty) = -\infty \\ (-\infty)x &= x(-\infty) = +\infty \\ 0(\pm\infty) &= (\pm\infty)0 = 0 \\ (+\infty)(+\infty) &= (-\infty)(-\infty) = +\infty \\ (+\infty)(-\infty) &= (-\infty)(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0$$

$$|\pm\infty| = +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty$$

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -\infty < x < +\infty$$

但下面的记号是没有意义的：

$$+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty)$$

$$+\infty + (-\infty), \quad -\infty + (+\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{x}{0}$$

注：有时也将  $+\infty$  简记为  $\infty$ 。

我们用  $\overline{R}$  表示实数的全体  $R$  再加上  $+\infty$ 、 $-\infty$  所成的“推广数集”，也称  $\overline{R}$  中的元素为广义实数。数直线上补入  $+\infty$  和  $-\infty$  后，称为扩张的数直线。

于是集函数就是以集类为定义域，集为变元，在  $\overline{R}$  中取值的函数。

例1 设  $\mathcal{S}$  是  $\Omega$  的有限子集的全体所成的类，对于每个  $A \in \mathcal{S}$ ，令

$$P(A) = A \text{ 中元素的个数}$$

则  $P$  是定义在  $\mathcal{S}$  上的实值集函数。

例2 设  $\Omega$  是一无限集， $\mathcal{S}$  是  $\Omega$  的有限子集与可列子集的全体所成的类，对于每个  $A \in \mathcal{S}$ ，令

$$P(A) = \begin{cases} A \text{ 中元素的个数, 当 } A \text{ 为有限集} \\ +\infty, \text{ 当 } A \text{ 为可列集} \end{cases}$$

则  $P$  是定义在  $\mathcal{S}$  上的广义实值函数。

定义2 设  $P$  是定义在集类  $\mathcal{S}$  上的集函数。如果对于任何  $A, B \in \mathcal{S}$ ，当  $A \cap B = \phi$  且  $A + B \in \mathcal{S}$  时，恒有

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

则称  $P$  具有可加性.

如果对于  $\mathcal{F}$  的任何不相交的有限子类  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , 当

$$\sum_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$$

时, 恒有

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

则称  $P$  具有有限可加性.

如果对于  $\mathcal{F}$  中之集的任何不相交数列  $\{A_n\}$ , 当

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

时, 恒有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称  $P$  具有可列可加性 (也称完全可加性或  $\sigma$ -可加性).

**定义 3** 设  $P$  是定义在环  $\mathcal{F}$  上的非负广义实值集函数, 如果它具有可列可加性, 且  $P(\phi) = 0$ , 则称  $P$  为  $\mathcal{F}$  上的测度.

易知, 例 1 与例 2 中的集函数都是测度.

设  $\mathcal{F}$  是任一个环, 对于任何  $A \in \mathcal{F}$ , 均令  $P(A) = +\infty$ , 则  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的一个非负的具有可列可加性的集函数. 容易看到, 除了这个恒取  $+\infty$  值的平凡情况外, 以上定义中  $P(\phi) = 0$  的条件可由  $P$  的可列可加性推出. 事实上, 对任何  $A \in \mathcal{F}$ , 有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A + \phi + \phi + \dots) \\ &= P(A) + P(\phi) + P(\phi) + \dots \end{aligned}$$

如果存在  $A \in \mathcal{F}$ , 使  $P(A)$  为有限数, 则由上式立即推出  $P(\phi) = 0$ . 于是上述关于测度的定义也可以简单地说成: 定义在环  $\mathcal{F}$  上的具有可列可加性且不恒等于  $+\infty$  的非负广义实值函数,

称为环 $\mathcal{F}$ 上的测度。

例3 设 $\Omega$ 是一空间,  $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\}$ , 令

$$P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$$

则 $P$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度。

例4 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ ,  $\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 的一切子集所成的类,  $p_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , 令

$$P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n, P(\phi) = 0$$

则 $P$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度。

定义4  $\mathcal{F}$ 是由 $\Omega$ 的某些子集所成的环,  $P$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度,  $A \in \mathcal{F}$ , 如果 $P(A) < +\infty$ , 则称 $A$ 具有有限测度。

如果任何 $A \in \mathcal{F}$ 都具有有限测度, 则称测度 $P$ 是有限的; 如果 $\Omega \in \mathcal{F}$  (即 $\mathcal{F}$ 是代数) 且 $P(\Omega) < +\infty$ , 则称 $P$ 是全有限的; 如果 $P(\Omega) = 1$ , 则称 $P$ 为概率测度。

设 $A \in \mathcal{F}$ , 如果存在一系列集 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ , 使得

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{且} \quad P(A_n) < +\infty$$

则称 $A$ 的测度是 $\sigma$ -有限的。如果每个 $A \in \mathcal{F}$ 的测度都是 $\sigma$ -有限的, 则称 $P$ 是 $\sigma$ -有限的。如果 $\Omega \in \mathcal{F}$  (即 $\mathcal{F}$ 是代数) 且 $\Omega$ 的测度是 $\sigma$ -有限的, 则称 $P$ 是全 $\sigma$ -有限的。

例如, 例3中的测度是全有限的。在例4中, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < +\infty$ , 则这个例中的测度 $P$ 是全有限的; 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ , 则 $P$ 不是全有限的, 但它是全 $\sigma$ -有限的。

例5 设 $\Omega$ 是一空间,  $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\}$ , 令

$$P(\phi) = 0, P(\Omega) = +\infty$$



则  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的测度, 但  $P$  不是全  $\sigma$ -有限的.

定理 1 环  $\mathcal{F}$  上的测度具有下列性质:

(1) 有限可加性: 如果  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ , 且这些集两两不相交, 则

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

证 因为

$$\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + \dots + A_n + \phi + \phi + \dots$$

于是由可列可加性及  $P(\phi) = 0$  即得

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(\phi) \\ &\quad + P(\phi) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \end{aligned}$$

(2) 单调性: 如果  $A, B \in \mathcal{F}$ , 且  $A \subset B$ , 则

$$P(A) \leq P(B)$$

证 因为  $A \subset B$ , 故  $B = A + (B - A)$ , 于是由可加性有

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad (1.1)$$

由于  $P(B - A) \geq 0$ , 故  $P(B) \geq P(A)$ .

(3) 可减性: 如果  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $A \subset B$ , 且  $P(A) < +\infty$ , 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (1.2)$$

证 因为  $P(A) < +\infty$ , 故可以 (1.1) 两端各减去  $P(A)$  即得 (1.2).

(4) 次可列可加性: 如果  $A_n (n = 1, 2, \dots)$  及  $A$  都属于  $\mathcal{F}$

且  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , 则

$$P(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

证 令

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_1^c \cdots A_{n-1}^c A_n$$

则

$$A = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap A = \left( \sum_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cap A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cap A$$

于是由  $P$  的可列可加性及单调性即得

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(5) 下连续性: 如果  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $\{A_n\}$  单

调增加, 且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ , 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.3)$$

即

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

证 如果对某个  $n$ ,  $P(A_n) = +\infty$ , 则 (1.3) 式显然成立, 下面设  $P(A_n) < +\infty$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

易知

$$\sum_{k=1}^n B_k = A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

于是

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k - A_{k-1}) \quad (A_0 = \phi) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [P(A_k) - P(A_{k-1})] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)
 \end{aligned}$$

(6) 上连续性: 如果  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\{A_n\}$  单调减少,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ , 且至少有一个  $A_n$ , 使  $P(A_n) < +\infty$ , 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.4)$$

即

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

证 不妨设  $P(A_1) < +\infty$ . 令

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$B_n = A_1 - A_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

易知  $\{B_n\}$  单调上升, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_1 - A$$

于是由 (5) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_1 - A_n) = P(A_1 - A)$$

即

$$P(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A_1) - P(A)$$

由于  $P(A_1) < +\infty$ , 故由上式即得

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

即 (1.4) 式成立.

定理 2 设  $\mathcal{F}$  是  $\sigma$ -环, 则  $\mathcal{F}$  上的测度  $P$  具有下列性质:

(1) 如果  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$ , 则

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.5)$$

证 记  $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ , 则  $\{B_n\}$  单调增加,  $B_n \subset A_n$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

于是由  $P$  的下连续性可知

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

(2) 如果  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$ , 而且存在正整数  $N$ ,

使得  $P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < +\infty$ , 则

$$P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.6)$$

证 记  $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ , 则  $\{B_n\}$  单调减少,  $B_n \supset A_n$ , 且

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

由于  $P(B_N) < +\infty$ , 于是由  $P$  的上连续性可知

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

(3) 如果  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  存在, 而且存在正整数  $N$ , 使得  $P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < +\infty$ , 则

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.7)$$

证 由 (1) 与 (2) 即得.

(4) 如果  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 而且存在正整数  $N$ , 使得  $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , 则

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0 \quad (1.8)$$

证 由于对任何正整数  $m$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

故

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) \quad (1.9)$$

由于

$$\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) < +\infty$$

故

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = 0$$

于是在 (1.9) 式中令  $m \rightarrow \infty$ , 并注意到  $P$  的非负性, 即得 (1.8).

**定理 3** 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所成的环,  $P_1$  与  $P_2$  是  $S(\mathcal{F})$  的两个测度, 当它们限制在  $\mathcal{F}$  上时是  $\sigma$ -有限的, 如果对于每个  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$P_1(A) = P_2(A)$$

则在  $S(\mathcal{F})$  上  $P_1 \equiv P_2$ .

证 记  $\mathcal{A}$  为  $S(\mathcal{F})$  中满足如下条件的一切集  $A$  所组成的类:

(1) 存在  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$ , 使得  $P_1(A_n) < +\infty$ ,

且

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(2) 对于一切  $E \in \mathcal{F}$ , 当  $P_1(E) < +\infty$ ,

$$P_1(E \cap A) = P_2(E \cap A)$$

由于  $P_1$  在  $\mathcal{F}$  上  $\sigma$ -有限, 且  $P_1$  与  $P_2$  在  $\mathcal{F}$  上相等, 所以  $\mathcal{F}$  中的每个集都满足 (1) 与 (2), 故有  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ .

下面证明在  $\mathcal{A}$  上  $P_1$  与  $P_2$  相等. 首先我们注意, 因为任何可列和都可以按第一章的公式 (1.6) 化为可列直和, 故条件 (1) 中的集列  $\{A_n\}$  可以这样选取, 使它们中任何两个互不相交, 于是当  $A \in \mathcal{A}$  时, 存在集列  $A_n \in \mathcal{F}$  使得  $P_1(A_n) < +\infty$ , 且

$$A \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

于是

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \tag{1.10}$$

又由条件 (2) 有

$$P_1(A_n \cap A) = P_2(A_n \cap A) \tag{1.11}$$

由 (1.10) 与 (1.11) 立即得到

$$P_1(A) = P_2(A)$$

于是就证明了在  $\mathcal{A}$  上  $P_1$  与  $P_2$  相等.



下面证明  $\mathcal{A}$  是单调类。设  $\{B_n\}$  是  $\mathcal{A}$  中任一单调集列，由于每个  $B_n$  满足条件 (1)，所以在  $\mathcal{F}$  中存在一列集  $\{A_n^{(m)}\}$ ，使得  $P_1(A_n^{(m)}) < +\infty$ ，且

$$B_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

由此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  满足条件 (1)。又当  $E \in \mathcal{F}$  且  $P_1(E) < +\infty$  时，

$$P_1(E \cap B_n) = P_2(E \cap B_n)$$

根据测度的上、下连续性及条件  $P_1(E) < +\infty$  有

$$P_1(E \cap \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(E \cap B_n)$$

$$P_2(E \cap \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(E \cap B_n)$$

由以上三式即得

$$P_1(E \cap \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = P_2(E \cap \lim_{n \rightarrow \infty} B_n)$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  满足条件 (2)，于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \in \mathcal{A}$ ，故  $\mathcal{A}$  是单调类。于是由第一章 §1.2 定理 5 的推论可知  $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ ，所以在  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上  $P_1 = P_2$ 。

### 习 题 2.1

1. 设  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的测度， $A, B \in \mathcal{F}$ ，则

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

2. 设  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的测度， $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ ，则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

将这个公式推广到  $n$  个集的情况。

3. 设  $P$  是定义在环  $\mathcal{S}$  上的广义实值函数, 如果它具有可加性, 且  $\mathcal{S}$  中至少存在一个集  $A$ , 使  $P(A) < +\infty$ , 则  $P(\phi) = 0$ .

4. 设  $P$  是  $\sigma$ -环  $\mathcal{S}$  上的一个测度, 则具有有限测度的一切集所组成的类是一个环, 具有  $\sigma$ -有限测度的一切集所组成的类是一个  $\sigma$ -环.

5. 设  $P$  是  $\sigma$ -环  $\mathcal{S}$  上的一个  $\sigma$ -有限测度, 如果具有有限测度的一切集所组成的类是一个  $\sigma$ -环, 则测度  $P$  必为有限.

6. 设  $\mathcal{A}$  是一个非空类,  $P$  是  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  上的一个测度, 如果对于任何  $A \in \mathcal{A}$  都有  $P(A) < +\infty$ , 则  $P$  在  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  上是有限的.

提示: 利用习题 1.2 第 15 题中的结论.

7. 举例说明定理 2 的 (2) 与 (3) 中, 存在正整数  $N$  使得

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < +\infty$$

的条件是不可省略的.

8. 举例说明在测度的上连续性定理中, 至少存在一个  $A_n$  使  $P(A_n) < +\infty$  的条件是不可省略的.

9. 举例说明定理 2 的 (4) 中, 存在正整数  $N$ , 使得

$$\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) < +\infty$$

的条件是不可省略的.

10. 设  $\mathcal{S}$  是习题 1.2 第 7 题中的集类, 试在  $\mathcal{S}$  上定义一个不恒为 0 的测度.

11. 设  $\Omega$  是任意的一个非空集,  $\mathcal{S}$  是  $\Omega$  的所有子集组成的  $\sigma$ -代数.

(1) 试在  $\mathcal{S}$  上定义一个仅取两个值的有限测度;

(2) 试在  $\mathcal{S}$  上定义一个非  $\sigma$ -有限的测度.

12. 设  $\Omega$  是一可数无限集,  $\mathcal{S}$  是一个类, 它的元素  $A \subset \Omega$  或是有限集或是有限集的补集.

令

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } A \text{ 为有限集} \\ 1, & \text{如果 } A' \text{ 为有限集} \end{cases}$$

证明

- (1)  $\mathcal{F}$  是一环;  
 (2)  $P$  具有有限可加性但不具有可列可加性;  
 (3)  $\Omega$  是一单调增加集列  $\{A_n\}$  的极限, 其中  $A_n \in \mathcal{F}$  且  $P(A_n) = 0$ , 但  $P(\Omega) = 1$ .

13. 设  $P$  是定义在环  $\mathcal{F}$  上的非负有限可加集函数。如果  $A_1, A_2, \dots$  是  $\mathcal{F}$  中的不相交集且  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ , 证明:

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

## § 2.2 外测度

**定义 1** 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所组成的  $\sigma$ -环,  $P^*$  是定义在  $\mathcal{F}$  上的集函数, 如果它满足

- (1)  $P^*(\phi) = 0$ ;  
 (2) 单调性: 当  $A, B \in \mathcal{F}$ , 且  $A \subset B$  时, 有  

$$P^*(A) \leq P^*(B)$$
  
 (3) 次可列可加性: 当  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$  时, 有

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n)$$

则称  $P^*$  是  $\mathcal{F}$  上的外测度。

显然, 外测度是非负的。事实上, 对于任意的  $A \in \mathcal{F}$ , 由于  $\phi \subset A$ , 故由  $P^*$  的单调性即得

$$P^*(A) \geq P^*(\phi) = 0$$

外测度也是次有限可加的, 事实上, 设  $A_k \in \mathcal{F} (k=1, 2, \dots, n)$ , 则由  $P^*$  的次可列可加性及  $P^*(\phi) = 0$ , 有

$$P^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k + \phi + \phi + \dots\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^n P^*(A_k) + P^*(\phi) + P^*(\phi) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^n P^*(A_k) \end{aligned}$$

易知,  $\mathcal{F}$  上的测度一定也是  $\mathcal{F}$  上的外测度. 然而, 下面的例子表明,  $\mathcal{F}$  上的外测度却未必是  $\mathcal{F}$  上的测度.

例 1 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所组成的  $\sigma$ -环, 令

$$P^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{当 } A = \phi \\ 1, & \text{当 } A \in \mathcal{F} \text{ 且 } A \neq \phi \end{cases}$$

则显然  $P^*$  是  $\mathcal{F}$  上的外测度, 但如果  $\mathcal{F}$  含有两个互不相交的非空集  $A$  与  $B$ , 则

$$P^*(A+B) = 1$$

$$P^*(A) + P^*(B) = 2$$

故  $P^*$  不是测度.

引理 1 设  $\mathcal{F}$  是由空间  $\Omega$  的某些子集所组成的环, 用记号  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  表示能用  $\mathcal{F}$  中一系列集覆盖的  $\Omega$  的子集的全体所组成的类, 即

$$\mathcal{H}(\mathcal{F}) = \left\{ A \mid A \subset \Omega, \text{存在 } A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots) \right. \\ \left. \text{使 } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

则

- (1)  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\mathcal{F})$ ;
- (2) 若  $A \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ , 则  $A$  的任何子集也属于  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ ;
- (3)  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  是  $\sigma$ -环.

证 (1) 与 (2) 是显然的. 下面证明 (3). 由 (2) 知,  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  对差运算是封闭的, 故只需证明  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  对可列和运算的封闭性.

设  $A_n \in \mathcal{H}(\mathcal{F}) (n=1, 2, \dots)$ , 则对于每个  $A_n$ , 存在  $A_n^{(k)} \in \mathcal{F} (k=1, 2, \dots)$ , 使得

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

于是有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

其中  $\{A_n^{(k)}\} (n, k=1, 2, \dots)$  是  $\mathcal{F}$  中的一列集, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$$

**定义 2** 设  $\mathcal{A}$  是空间  $\Omega$  的某些子集组成的非空类, 如果当  $B \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$  时, 恒有  $A \in \mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是可传的.

由引理 1 易知,  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  是包含  $\mathcal{F}$  的最小可传的  $\sigma$ -环, 我们称它为由  $\mathcal{F}$  产生的可传  $\sigma$ -环.

**例 2** 设  $\Omega$  是任一空间,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的有限子集 (包括空集  $\phi$ ) 的全体所成的环, 则  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  是  $\Omega$  的有限子集 (包括空集  $\phi$ ) 和可列子集的全体所成的类.

**定理 1** 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集所成的环,  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的测度, 当  $A \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$  时, 令

$$P^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \mid A_n \in \mathcal{F} \text{ 且 } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \quad (2.1)$$

则  $P^*$  是  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  上的外测度, 且在  $\mathcal{F}$  上  $P^* \equiv P$ .

$P^*$  称为由环  $\mathcal{F}$  上的测度  $P$  引出的外测度.

**证**  $P^*(\phi) = 0$  及  $P^*$  的单调性可直接由  $P^*$  的定义得出. 下面证明  $P^*$  的次可列可加性.

设  $A_n \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 由于  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  是  $\sigma$ -环, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$$

如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) = +\infty$$

则当然有

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) \quad (2.2)$$

下面考虑所有  $P^*(A_n) < +\infty$  的情况. 任给  $\varepsilon > 0$ , 根据  $P^*$  的定义, 对于每个  $A_n$ , 存在

$$A_n^{(k)} \in \mathcal{F} \quad (k=1, 2, \dots)$$

使得

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_n^{(k)}) \leq P^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n^{(k)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) + \varepsilon$$

但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

故有

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n^{(k)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) + \varepsilon$$



令  $\varepsilon \rightarrow 0$  就得到 (2.2) 式, 于是就证明了  $P^*$  的次可列可加性, 因而证明了  $P^*$  是  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  上的外测度.

在  $\mathcal{F}$  上  $P^* = P$  是显然的. 事实上, 设  $A \in \mathcal{F}$ , 则由测度的次可列可加性, 对于任何  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$ , 当

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

时, 有

$$P(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

故

$$P(A) \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \mid A_n \in \mathcal{F} \text{ 且 } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \\ = P^*(A) \quad (2.3)$$

另一方面, 取  $A_1 = A, A_n = \phi (n \geq 2)$ , 则  $A_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$  且

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , 故由  $P^*$  的定义有

$$P^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) \quad (2.4)$$

由 (2.3) 与 (2.4) 即得  $P^*(A) = P(A)$ .

**定理 2** 设  $P^*$  是由环  $\mathcal{F}$  上的测度  $P$  引出的外测度, 如果  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ , 则

$$P^*(B) = P^*(B \cap A) + P^*(B - A) \quad (2.5)$$

**证** 由于

$$B = (B \cap A) \cup (B - A)$$

故由  $P^*$  的次有限可加性有

$$P^*(B) \leq P^*(B \cap A) + P^*(B - A) \quad (2.6)$$

下面证明相反的不等式

$$P^*(B) \geq P^*(B \cap A) + P^*(B - A) \quad (2.7)$$

如果  $P^*(B) = +\infty$ , 则 (2.7) 显然成立. 故只要讨论  $P^*(B) < +\infty$  的情况.

由  $P^*(B)$  的定义知, 对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 使得  $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , 且

$$P^*(B) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (2.8)$$

记

$$A_n^1 = A_n \cap A, \quad A_n^2 = A_n - A$$

则  $A_n^1, A_n^2 \in \mathcal{F}$ . 显然

$$P(A_n) = P(A_n^1 + A_n^2) = P(A_n^1) + P(A_n^2)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap A \supset B \cap A$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) - A \supset B - A$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^1) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^2) \\ &\geq P^*(B \cap A) + P^*(B - A) \end{aligned} \quad (2.9)$$

从而由 (2.8) 及 (2.9) 有

$$P^*(B) + \varepsilon > P^*(B \cap A) + P^*(B - A)$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得 (2.7), 由 (2.7) 与 (2.6) 即得 (2.5) 式.

## 习 题 2.2

1. 设  $P^*$  是定义在  $\sigma$ -环  $\mathcal{F}$  上的具有单调性和次可列可加性的集函数, 且  $P^*$  不恒等于  $+\infty$ ,  $P^*$  是否是  $\mathcal{F}$  上的外测度?

2. 证明两个外测度之和是一外测度.

3. 设 $P_1^*$ 与 $P_2^*$ 是 $\sigma$ -环 $\mathcal{F}$ 上的两个外测度, 令

$$P^*(A) = \min\{P_1^*(A), P_2^*(A)\}, A \in \mathcal{F}$$

$$Q^*(A) = \max\{P_1^*(A), P_2^*(A)\}, A \in \mathcal{F}$$

$P^*$ 与 $Q^*$ 是否是 $\mathcal{F}$ 上的外测度?

4. 设 $\{P_n^*\}$ 是定义在 $\sigma$ -环 $\mathcal{F}$ 上的外测度叙列,  $\{a_n\}$ 是一个正实数列, 令

$$P^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n^*(A)$$

证明 $P^*$ 是 $\mathcal{F}$ 上的外测度.

5. 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 是恰好包含两个不同点 $\omega_1$ 与 $\omega_2$ 的空间,  $\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 的一切子集组成的类,  $P^*$ 由下式确定:

$$P^*(\{\omega_1\}) = 1, P^*(\{\omega_2\}) = 2$$

$$P^*(\phi) = 0, P^*(\Omega) = a$$

其中 $a$ 为广义实数.

(1) 当 $a$ 为何值时 $P^*$ 是 $\mathcal{F}$ 上的外测度?

(2) 当 $a$ 为何值时 $P^*$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度?

6. 设 $\Omega$ 是全体正整数的集合,  $\mathcal{F}$ 是由 $\Omega$ 的一切子集组成的类, 对于 $\Omega$ 的每个有限子集 $A$ , 以 $P(A)$ 表示 $A$ 中点的数目. 令

$$P^*(E) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P(E \cap \{1, 2, \dots, n\}), E \in \mathcal{F}$$

$$Q^*(E) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P(E \cap \{1, 2, \dots, n\}), E \in \mathcal{F}$$

$P^*$ 与 $Q^*$ 是否为 $\mathcal{F}$ 上的外测度?

7. 证明任意多个可传 $\sigma$ -环的交也是一可传 $\sigma$ -环.

8. 证明 $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ 是包含 $\mathcal{F}$ 的最小可传 $\sigma$ -环.

9. 设 $P$ 是 $\sigma$ -环 $\mathcal{F}$ 上的测度,  $P^*$ 是由 $P$ 引出的外测度, 证明如果 $P$ 是 $\sigma$ -有限的, 则 $P^*$ 也是 $\sigma$ -有限的. 如果 $P$ 是有限的, 是否 $P^*$ 也有限?

注: 关于外测度的有限或 $\sigma$ -有限等概念, 可以仿照关于测度的相应概念来定义.

10. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 的某些子集所成的 $\sigma$ -环,  $P$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度, 令

$$P^*(A) = \inf\{P(B) \mid A \subset B \in \mathcal{F}\}, A \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$$

证明 $P^*$ 就是由 $P$ 引出的外测度。

11. 如果 $\mathcal{F}$ 是一般的环（即未必是 $\sigma$ -环），上题中的结论是否成立？

12. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 的某些子集所成的 $\sigma$ -环， $P$ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度，令

$$P_*(A) = \sup\{P(B) \mid A \supset B \in \mathcal{F}\}, A \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$$

称 $P_*$ 为由 $P$ 引出的内测度，证明

(1)  $P_*(\phi) = 0, P_*(A) \geq 0$  ( $A \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ );

(2) 设 $A, B \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$  且  $A \subset B$ , 则

$$P_*(A) \leq P_*(B)$$

(3) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ 中之集的不相交叙列，则

$$P_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_*(A_n)$$

(4) 设 $A, B \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ , 且  $A \cap B = \phi$ , 则

$$P_*(A+B) \leq P_*(A) + P_*(B) \leq P^*(A+B)$$

## § 2.3 测度的拓展

上节的定理 2 启示我们引入下面的定义：

定义 1 设 $P^*$ 是 $\sigma$ -环 $\mathcal{F}$ 上的外测度， $A \in \mathcal{F}$ ，如果对于任何 $B \in \mathcal{F}$ 都有

$$P^*(B) = P^*(B \cap A) + P^*(B - A) \quad (3.1)$$

则称 $A$ 是 $P^*$ -可测集， $P^*$ -可测集的全体记为 $\mathcal{G}^*$ 。

等式 (3.1) 称为集 $A$ 的卡拉太屋独里 (Carathéodory) 条件，它也可以写为

$$P^*(B) = P^*(B \cap A) + P^*(B \cap A')$$

定理 1 设 $P^*$ 是 $\sigma$ -环 $\mathcal{F}$ 上的外测度，则 $P^*$ -可测集的全体 $\mathcal{G}^*$ 是一个 $\sigma$ -环，而且 $P^*$ 是 $\mathcal{G}^*$ 上的测度。

$\mathcal{G}^*$ 上的测度 $P^*$ 称为 $\mathcal{F}$ 上的外测度 $P^*$ 所引出的测度。

证 分以下几步来证明：

(1) 证明  $\mathcal{S}^*$  对和运算封闭.

设  $A_1, A_2 \in \mathcal{S}^*$ , 则对于任意的  $B \in \mathcal{S}$ , 有

$$\begin{aligned} P^*(B) &= P^*(B \cap A_1) + P^*(B \cap A_1') \\ &= P^*(B \cap A_1 \cap A_2) + P^*(B \cap A_1 \cap A_2') \\ &\quad + P^*(B \cap A_1' \cap A_2) + P^*(B \cap A_1' \cap A_2') \end{aligned} \quad (3.2)$$

以  $B \cap (A_1 \cup A_2)$  代替 (3.2) 中的  $B$  得

$$\begin{aligned} P^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) &= P^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1 \cap A_2) + P^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \\ &\quad \cap A_1 \cap A_2') + P^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1' \cap A_2) \\ &\quad + P^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1' \cap A_2') \\ &= P^*(B \cap A_1 \cap A_2) + P^*(B \cap A_1 \cap A_2') \\ &\quad + P^*(B \cap A_1' \cap A_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

代入 (3.2) 得

$$\begin{aligned} P^*(B) &= P^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + P^*(B \cap A_1' \cap A_2') \\ &= P^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + P^*(B \cap (A_1 \cup A_2)') \end{aligned}$$

所以集  $A_1 \cup A_2$  满足卡拉太屋独里条件, 故  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}^*$ .

(2) 证明  $\mathcal{S}^*$  对差运算封闭.

设  $A_1, A_2 \in \mathcal{S}^*$ ,  $B \in \mathcal{S}$ . 用  $B \cap (A_1 \cap A_2)'$  代替 (3.2)

中的  $B$  得

$$\begin{aligned} P^*(B \cap (A_1 \cap A_2)') &= P^*(B \cap (A_1' \cup A_2)) \\ &= P^*(B \cap (A_1' \cup A_2) \cap A_1 \cap A_2) + P^*(B \cap (A_1' \cup A_2) \\ &\quad \cap A_1 \cap A_2') + P^*(B \cap (A_1' \cup A_2) \cap A_1' \cap A_2) \\ &\quad + P^*(B \cap (A_1' \cup A_2) \cap A_1' \cap A_2') \\ &= P^*(B \cap A_1 \cap A_2) + P^*(B \cap A_1' \cap A_2) \\ &\quad + P^*(B \cap A_1' \cap A_2') \end{aligned}$$

代入 (3.2) 式得

$$P^*(B) = P^*(B \cap A_1 \cap A_2') + P^*(B \cap (A_1 \cap A_2)')$$

所以集  $A_1 \cap A_2' = A_1 - A_2$  满足卡拉太屋独里条件, 故  $A_1 - A_2 \in \mathcal{S}^*$ .

(1) 与 (2) 表明,  $\mathcal{S}^*$  是一个环.

(3) 设  $B \in \mathcal{F}$ ,  $A_1, A_2 \in \mathcal{S}^*$  且  $A_1 \cap A_2 = \phi$ , 证明

$$P^*(B \cap A_1 + B \cap A_2) = P^*(B \cap A_1) + P^*(B \cap A_2) \quad (3.4)$$

由假设有

$$A_1 \cap A_2 = \phi, \quad A_1 \cap A_2' = A_1$$

$$A_1' \cap A_2 = A_2$$

于是由 (3.3) 式立即推得 (3.4) 式.

用归纳法可将 (3.4) 式推广如下: 设  $A_k \in \mathcal{S}^*$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 且  $A_i \cap A_j = \phi$  ( $i \neq j$ ), 则对任意的  $B \in \mathcal{F}$  有

$$P^*\left(\sum_{k=1}^n B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^n P^*(B \cap A_k) \quad (3.5)$$

(4) 证明  $\mathcal{S}^*$  对可列直和运算封闭.

设  $A_n \in \mathcal{S}^*$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $A_i \cap A_j = \phi$  ( $i \neq j$ ), 由于  $\mathcal{S}^*$  是环, 故

$$\sum_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}^*$$

于是由卡拉太屋独里条件及 (3.5) 式, 对于任意的  $B \in \mathcal{F}$  有

$$\begin{aligned} P^*(B) &= P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^n A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^n A_k\right)'\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n P^*(B \cap A_k) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right) \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  得



$$\begin{aligned}
P^*(B) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P^*(B \cap A_k) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right) \\
&\geq P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right)
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

又

$$B = B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k + B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'$$

故由  $P^*$  的次可加性有

$$P^*(B) \leq P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right)
\tag{3.7}$$

由 (3.6) 与 (3.7) 即得

$$P^*(B) = P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right)
\tag{3.8}$$

故  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$  满足卡拉太屋独里条件, 因而

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}^*$$

推论 由 (3.6) 与 (3.8) 有

$$P^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P^*(B \cap A_k) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right)
\tag{3.9}$$

(5) 证明  $P^*$  是  $\mathcal{S}^*$  上的测度.

设  $A_k \in \mathcal{S}^* (k=1, 2, \dots)$  且  $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$ , 在 (3.9) 式

中令  $B = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$  即得

$$P^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P^*(A_k)$$

即  $P^*$  在  $\mathcal{S}^*$  上可列可加，因而是  $\mathcal{S}^*$  上的测度。

(6) 证明  $\mathcal{S}^*$  是  $\sigma$ -环。

设  $A_n \in \mathcal{S}^*$ ,  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $\diamond$

$$B_1 = A_1, B_n = A_1^c \cdots A_{n-1}^c A_n \quad (n \geq 2)$$

因为  $\mathcal{S}^*$  是环，故  $B_n \in \mathcal{S}^*$ ，于是由 (4) 及第一章公式(1.5) 有

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}^*$$

故  $\mathcal{S}^*$  对可列和运算封闭，又 (2) 中已证  $\mathcal{S}^*$  对差运算封闭，故  $\mathcal{S}^*$  是  $\sigma$ -环。

**定义 2** 设  $P$  是环  $\mathcal{S}$  上的测度， $A \in \mathcal{S}$ 。如果  $P(A) = 0$ ，则称  $A$  是  $P$ -零集，简称零集。

由测度的非负性和单调性可知， $P$ -零集的子集如果也属于  $\mathcal{S}$  就必然也是零集。但对一般环  $\mathcal{S}$  上的测度  $P$ ， $P$ -零集的子集不一定属于  $\mathcal{S}$ 。

**例 1** 设  $\Omega$  是一个空间， $\mathcal{S} = \{\Omega, \phi\}$ ，

$$P(\Omega) = P(\phi) = 0$$

则  $P$  是环  $\mathcal{S}$  上的一个测度。当  $\Omega$  至少有两个元素时， $\Omega$  的每个非空真子集都不属于  $\mathcal{S}$ 。

**定义 3** 设  $P$  是环  $\mathcal{S}$  上的测度，如果  $\mathcal{S}$  中任何  $P$ -零集的任何子集都必定属于  $\mathcal{S}$ ，则称  $P$  是完全测度。

例如，上例中的测度  $P$  不是完全的。

**例 2** 设空间  $\Omega$  是任意一个非空集,  $\mathcal{F}$  表示  $\Omega$  的所有子集的全体所成的环. 在  $\Omega$  中任意定一个元素  $a$ , 令

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{当 } a \notin A \\ 1, & \text{当 } a \in A \end{cases} \quad (A \in \mathcal{F})$$

则  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的完全测度.

**引理** 设  $P^*$  是  $\sigma$ -环  $\mathcal{F}$  上的外测度, 如果  $A \in \mathcal{F}$  且  $P^*(A) = 0$ , 则  $A \in \mathcal{G}^*$ .

**证** 对任何  $B \in \mathcal{F}$ , 由外测度的单调性及非负性, 有

$$0 \leq P^*(B \cap A) \leq P^*(A) = 0$$

故有

$$P^*(B \cap A) = 0 \quad (3.10)$$

又由  $P^*$  的次可加性及 (3.10) 式有

$$\begin{aligned} P^*(B - A) &\leq P^*(B) \\ &\leq P^*(B \cap A) + P^*(B - A) \\ &= P^*(B - A) \end{aligned}$$

上式左右两端相同, 因此中间的不等式就成为等式, 即

$$P^*(B) = P^*(B \cap A) + P^*(B - A)$$

因此  $A \in \mathcal{G}^*$ .

**定理 2** 设  $\mathcal{F}$  是一个可传  $\sigma$ -环, 则由  $\mathcal{F}$  上的外测度  $P^*$  所引出的测度是  $\mathcal{G}^*$  上的完全测度.

**证** 设  $B \in \mathcal{G}^*$ ,  $A \subset B$  且  $P^*(B) = 0$ . 由于  $B \in \mathcal{F}$  而  $\mathcal{F}$  是可传类, 故  $A \in \mathcal{F}$ , 由  $P^*$  的单调性及非负性有  $P^*(A) = 0$ , 于是由引理知,  $A \in \mathcal{G}^*$ , 故  $\mathcal{G}^*$  上的  $P^*$  是完全测度.

**定义 4** 设  $\mathcal{F}_1$  与  $\mathcal{F}_2$  是空间  $\Omega$  的某些子集所组成的两个环,  $P_1$  与  $P_2$  分别是  $\mathcal{F}_1$  与  $\mathcal{F}_2$  上的测度. 如果  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ , 且在  $\mathcal{F}_1$  上  $P_1 \equiv P_2$ , 则称  $P_2$  是  $P_1$  由  $\mathcal{F}_1$  拓展到  $\mathcal{F}_2$  的拓展测度.

下面我们要讨论如何将环  $\mathcal{F}$  上的测度拓展到  $\mathcal{F}$  所产生的

$\sigma$ -环  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上去.

**定理 3** 设  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的测度,  $P^*$  是由  $P$  引出的  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上的外测度, 则外测度  $P^*$  引出的  $\mathcal{S}^*$  上的测度是  $P$  的扩展测度.

**证** 定理 1 已经证明  $P^*$  是  $\mathcal{S}^*$  上的测度, 而 § 2·2 的定理 2 则表明  $\mathcal{F}$  中的每个集都是  $P^*$ -可测集, 故有  $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}^*$ , 又由 § 2·2 的定理 1 知, 当  $A \in \mathcal{F}$  时,  $P^*(A) = P(A)$ . 于是就证明了  $\mathcal{S}^*$  上的测度  $P^*$  确是  $P$  的扩展测度.

**注:** 由定理 2 知,  $P$  由  $\mathcal{F}$  扩展到  $\mathcal{S}^*$  上的扩展测度  $P^*$  是完全测度.

今后我们凡是遇到环  $\mathcal{F}$  上的测度  $P$ , 总是立即扩展成为  $\mathcal{S}^*$  上的测度. 在不致发生混淆的情况下,  $\mathcal{S}^*$  上的这个扩展测度仍用记号  $P$  来表示, 这样就把  $P$  的定义域扩大了.

**定理 4** 设  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的测度, 则在  $\sigma$ -环  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上存在一个测度  $\bar{P}$ , 使得当  $A \in \mathcal{F}$  时,

$$\bar{P}(A) = P(A)$$

如果  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限测度, 则上述  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上的测度  $\bar{P}$  是唯一的.

$\bar{P}$  称为  $P$  由  $\mathcal{F}$  扩展到  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  的扩展测度.

**证** 存在性实际上已在定理 3 中证明. 事实上, 由于  $\mathcal{S}^*$  是  $\sigma$ -环, 且  $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}^*$ , 故  $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S}^*$ , 因此当  $A \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$  时, 可令

$$\bar{P}(A) = P^*(A)$$

则  $\bar{P}$  就是  $P$  由  $\mathcal{F}$  扩展到  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  的扩展测度.

扩展测度的唯一性可直接由 § 2·1 的定理 3 推出.

今后在不致引起混淆的情况下, 对于  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  或  $\mathcal{S}^*$  中的集  $A$ , 我们也将以  $P(A)$  来代替  $\bar{P}(A)$  或  $P^*(A)$ .

**定理 5** 设  $P$  是  $\sigma$ -环  $\mathcal{F}$  上的测度,  $\overline{\mathcal{F}}$  是一切形如  $A \cup N$  之集组成的类, 其中  $A \in \mathcal{F}$ ,  $N$  是  $\mathcal{F}$  中测度为零之集的子集, 即  $N \subset M \in \mathcal{F}$  且  $P(M) = 0$ , 则

(1)  $\overline{\mathcal{F}}$  是一个  $\sigma$ -环;

(2) 由等式  $\overline{P}(A \cup N) = P(A)$  (3.11)

确定的集函数  $\overline{P}$  是  $\overline{\mathcal{F}}$  上的一个完全测度.

$\overline{P}$  称为  $P$  的增补测度 (简称增补) 或完全测度.  $\overline{\mathcal{F}}$  则称为  $\mathcal{F}$  相对于  $P$  的完全化.

证 分以下几个步骤来证明:

(1) 设  $E_1, E_2 \in \overline{\mathcal{F}}$ , 则  $E_1 = A_1 \cup N_1, E_2 = A_2 \cup N_2$ , 其中  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}, N_1 \subset M_1 \in \mathcal{F}, N_2 \subset M_2 \in \mathcal{F}$ , 且  $P(M_1) = P(M_2) = 0$ , 由集代数易得

$$E_1 - E_2 = (A_1 \cap A_2' \cap M_2') \cup N,$$

其中  $N \subset M_1 \cup M_2$ , 由于  $A_1 \cap A_2' \cap M_2' \in \mathcal{F}, P(M_1 \cup M_2) = 0$ , 故  $E_1 - E_2 \in \overline{\mathcal{F}}$ , 即  $\overline{\mathcal{F}}$  对差运算封闭; 又显然  $\overline{\mathcal{F}}$  对可列和运算封闭, 故  $\overline{\mathcal{F}}$  是  $\sigma$ -环.

(2) 由 (3.11) 定义的  $\overline{P}$  的值是唯一确定的.

设  $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \in \overline{\mathcal{F}}$ , 其中

$$A_1 \in \mathcal{F}, N_1 \subset M_1 \in \mathcal{F}, P(M_1) = 0$$

$$A_2 \in \mathcal{F}, N_2 \subset M_2 \in \mathcal{F}, P(M_2) = 0$$

我们有

$$P(A_1) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 - A_2)$$

由于

$$A_1 - A_2 \subset (A_2 \cup N_2) - A_2 \subset N_2$$

故有  $P(A_1 - A_2) = 0$ , 于是有

$$P(A_1) = P(A_1 \cap A_2)$$

根据对称性有  $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2)$ , 于是有  $P(A_1) = P(A_2)$ .

(3)  $\bar{P}$  是  $\bar{\mathcal{F}}$  上的测度.

为此只须证  $\bar{P}$  的可列可加性. 设  $E_n \in \bar{\mathcal{F}}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 且互不相交, 设  $E_n = A_n \cup N_n$ , 其中

$$A_n \in \mathcal{F}, N_n \subset M_n \in \mathcal{F}, P(M_n) = 0$$

则

$$\begin{aligned} \bar{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \bar{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cup N_n)\right) \\ &= \bar{P}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\sum_{n=1}^{\infty} N_n\right)\right) \\ &= \bar{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \end{aligned}$$

(4)  $\bar{P}$  是完全测度.

设  $M \subset A \cup N \in \bar{\mathcal{F}}$ , 其中

$$A \in \mathcal{F}, P(A) = 0, N \subset B \in \mathcal{F}, P(B) = 0$$

则

$$M \subset A \cup B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) = 0$$

故  $M \in \bar{\mathcal{F}}$ .

在以下诸引理及定理 6 中, 设  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的测度,  $P^*$  是由  $P$  引出的外测度,  $\mathcal{S}^*$  是  $P^*$ -可测集的全体,  $P$  在  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上的拓展测度仍记为  $P$ , 此拓展测度的增补测度记为  $\bar{P}$ , 其定义域则记为  $\bar{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$ .

引理 2  $P^*$ -零集都是  $\bar{P}$ -零集.

证 设  $P^*(A) = 0$ , 根据  $P^*(A)$  的定义, 对于任何正整数  $n$ , 存在  $A_{nk} \in \mathcal{F}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), 使得  $A \subset \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}$  且



$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n,k}) < \frac{1}{n}$$

令  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ , 则有  $A \subset E \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$  且  $P(E) = 0$ . 由于  $\bar{P}$  是完全测度, 故由此有  $\bar{P}(A) = 0$ .

**引理 3** 如果  $A \in \mathcal{S}^*$  且  $P^*(A) < \infty$ , 则  $A \in \bar{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$  且  $P^*(A) = \bar{P}(A)$ .

**证** 根据  $P^*(A)$  的定义, 对于任何正整数  $n$ , 存在  $A_{n,k} \in \mathcal{F} (k=1, 2, \dots)$  使得  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ , 而且

$$P^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n,k}) \leq P^*(A) + \frac{1}{n}$$

令  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ , 则  $A \subset E \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$ , 且

$$\begin{aligned} P^*(A) &\leq P^*(E) = P(E) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n,k}) \leq P^*(A) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得  $P^*(A) = P^*(E) = P(E)$ . 因为  $A \in \mathcal{S}^*$ ,  $E \in \mathcal{S}^*$ , 故

$$P^*(A) = P^*(E) = P^*(A) + P^*(E - A)$$

由于  $P^*(A) < \infty$ , 故由上式有  $P^*(E - A) = 0$ , 于是由引理 2 知,  $E - A \in \bar{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$  且为  $\bar{P}$  零集, 又由于  $E \in \mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \bar{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$ , 于是有

$$A = E - (E - A) \in \bar{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$$

且

$$\bar{P}(A) = \bar{P}(E) - \bar{P}(E - A)$$

$$= \overline{P}(E) = P(E) = P^*(A)$$

引理4 如果  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限测度, 则  $P^*$  是  $\mathcal{S}^*$  上的  $\sigma$ -有限测度.

证 由于  $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{H}(\mathcal{F})$ , 故对于每个  $A \in \mathcal{S}^*$ , 存在  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 使  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , 又因为  $P$  在  $\mathcal{F}$  上是  $\sigma$ -有限的,

故对于每个  $A_n$ , 存在  $A_{nk} \in \mathcal{F}$ ,  $P(A_{nk}) < \infty$  ( $k=1, 2, \dots$ ),

使得  $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ , 于是

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}, \quad P^*(A_{nk}) = P(A_{nk}) < \infty$$

即  $A$  的  $P^*$  测度是  $\sigma$ -有限的.

定理6 设  $P$  是环  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限测度, 则  $\overline{P}$  与  $P^*$  恒等, 即

$$\overline{P}(A) = P^*(A), \quad A \in \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) = \mathcal{S}^*$$

证 先设  $A \in \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$ , 则  $A = E \cup N$ ,  $\overline{P}(A) = P(E)$ , 其中  $E \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$ ,  $N \subset M \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$ ,  $P(M) = 0$ . 因为  $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S}^*$ , 故  $E \in \mathcal{S}^*$ ,  $M \in \mathcal{S}^*$ , 由于  $P^*$  是完全测度, 故  $N \in \mathcal{S}^*$ , 于是有  $A \in \mathcal{S}^*$  且

$$P^*(E) \leq P^*(A) \leq P(E) + P^*(N) = P^*(E)$$

于是有  $P^*(A) = P^*(E) = P(E)$ , 从而有  $P^*(A) = \overline{P}(A)$ .

现在设  $A \in \mathcal{S}^*$ . 由引理4知,  $P^*$  是  $\mathcal{S}^*$  上的  $\sigma$ -有限测度, 于是存在  $A_n \in \mathcal{S}^*$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $P^*(A_n) < \infty$ , 使得

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{令}$$

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1^c A_2, \quad \dots$$

$$B_n = A_1^c \cdots A_{n-1}^c A_n$$

则有

$$A = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cap A$$

由于  $B_n \cap A \in \mathcal{S}^*$  且  $P^*(B_n \cap A) < \infty$ , 故由引理 3 有  $B_n \cap A \in \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$  且  $P^*(B_n \cap A) = \overline{P}(B_n \cap A)$ , 于是  $A \in \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$  且

$$P^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^*(B_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P}(B_n \cap A) = \overline{P}(A)$$

### 习 题 2.3

1. 设  $P$  是  $\sigma$ -环  $\mathcal{S}$  上的测度,  $\mathcal{S}_1$  是一切形如  $A \cup N$  之集组成的类,  $\mathcal{S}_2$  是一切形如  $A - N$  之集组成的类,  $\mathcal{S}_3$  是一切形如  $A \Delta N$  之集组成的类,  $\mathcal{S}_4$  是一切形如  $(A - N_1) \cup N_2$  之集所组成的类, 其中  $A \in \mathcal{S}$ ,  $N, N_1, N_2$  是  $\mathcal{S}$  中测度为零之集的子集. 证明

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4$$

2. 设  $P$  是  $\sigma$ -环  $\mathcal{S}$  上的测度,  $\overline{\mathcal{S}}$  为  $\mathcal{S}$  相对于  $P$  的完全化,  $\overline{P}$  是  $P$  的增补,  $\mathcal{H}(\mathcal{S})$  是包含  $\mathcal{S}$  的最小可传  $\sigma$ -环.  $P_*$  与  $P^*$  分别为由  $P$  引出的  $\mathcal{H}(\mathcal{S})$  上的外测度和内测度 (参见习题 2.2 问题 10 与 12). 证明:

(1) 如果  $A \in \overline{\mathcal{S}}$ , 则  $P_*(A) = P^*(A) = \overline{P}(A)$ ;

(2) 如果  $P_*(A) = P^*(A) < \infty$ , 则  $A \in \overline{\mathcal{S}}$ .

3. 下面的例子表明, 在定理 4 中, 为了保证  $S(\mathcal{S})$  上的拓展测度的唯一性,  $P$  在  $\mathcal{S}$  上为  $\sigma$ -有限的条件是不可少的.

设  $\Omega$  是有理数的全体.  $\mathcal{S}$  是  $\Omega$  中有限个左开右闭区间的和集  $E = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$  的全体所组成的类. 则  $\mathcal{S}$  是一个环.

注:  $\Omega$  中的左开右闭区间的定义是

$$(a, b] = \{\omega \mid \omega \in \Omega, a < \omega \leq b\} \quad a, b \text{ 为有理数.}$$

(1)  $\mathcal{S}(\mathcal{S})$  由  $\Omega$  中的一切子集组成;

(2) 设  $A \in \mathcal{S}(\mathcal{S})$ , 令

$$P(A) = \begin{cases} A \text{ 中的点的个数, 当 } A \text{ 为有限集} \\ \infty, \text{ 当 } A \text{ 为无限集} \end{cases}$$

则  $P$  在  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上为  $\sigma$ -有限, 但在  $\mathcal{S}$  上不是  $\sigma$ -有限;

(3) 设  $\lambda(A) = 2P(A)$ ,  $A \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$ . 则在  $\mathcal{S}$  上  $\lambda = P$ , 但在  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上此等式不成立;

(4) 对限制在  $\mathcal{S}$  上的测度  $P$  按定理 3 求出拓展测度  $P^*$ . 试将  $P^*$  和  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  上的  $P$  相比较.

## § 2.4 勒贝格-斯提杰 (Lebesgue-Stieltjes) 测度

**定义 1** 设  $F(x)$  是定义在  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  上的实值函数, 如果满足条件:

(1)  $F(x)$  单调增加, 即当  $x_1 < x_2$  时, 有  $F(x_1) \leq F(x_2)$ ;

(2)  $F(x)$  右连续, 即当  $x \in \mathbb{R}$  时有

$$F(x+0) = \lim_{x' \rightarrow x+0} F(x') = F(x)$$

则称  $F(x)$  是分布函数. 如果  $F(x)$  还满足

(3)  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) < +\infty.$$

则称  $F(x)$  是定分布函数.

满足条件  $F(+\infty) = 1$  的定分布函数称为概率分布函数.

设  $\mathcal{A}$  是所有有限的左开右闭区间  $(a, b]$  所组成的类.  $F(x)$  是一给定的分布函数. 在  $\mathcal{A}$  上定义一个集函数  $P$  如下:

$$P((a, b]) = F(b) - F(a) \quad (4.1)$$

注意, 当  $a = b$  时, 区间  $(a, b]$  理解为空集, 因此

$$P(\phi) = 0$$

下面我们来讨论集函数  $P$  的一些性质.

**引理 1** 设  $A_k \in \mathcal{A}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 且互不相交, 如果  $A_k \subset$

$A_0(k=1,2,\dots,n)$ , 其中  $A_0 \in \mathcal{A}$ , 则

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) \leq P(A_0)$$

证 令

$$A_k = [a_k, b_k], \quad k=0,1,\dots,n$$

不失一般性我们可以假定

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

由于诸  $A_k (k=1,2,\dots,n)$  互不相交, 故有

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_0$$

于是注意到  $F(x)$  的单调性有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(A_k) &= \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)] \\ &\leq \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)] + \sum_{k=1}^{n-1} [F(a_{k+1}) \\ &\quad - F(b_k)] \\ &= F(b_n) - F(a_1) \\ &\leq F(b_0) - F(a_0) \\ &= P(A_0) \end{aligned}$$

引理 2 设  $A_0 = [a_0, b_0]$  是有限闭区间,  $A_k = (a_k, b_k)$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) 是有限开区间, 且

$$A_0 \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$$

则

$$F(b_0) - F(a_0) \leq \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)]$$

证 只要去掉那些多余的  $A_k$ , 并适当改变编号, 我们就可以假定:

$$a_1 < a_0 < b_1, a_n < b_0 < b_n$$

$$a_{k+1} < b_k < b_{k+1}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

于是, 注意到  $F(x)$  的单调性有

$$F(b_0) - F(a_0) \leq F(b_n) - F(a_1)$$

$$= F(b_1) - F(a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [F(b_{k+1}) - F(b_k)]$$

$$\leq F(b_1) - F(a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [F(b_{k+1}) - F(a_{k+1})]$$

$$= \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)]$$

引理 3 设  $A_k \in \mathcal{A} (k=0, 1, \dots)$ , 且

$$A_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

则

$$P(A_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

证 令

$$A_k = (a_k, b_k], k = 0, 1, \dots$$

若  $a_0 = b_0$ , 引理显然成立. 下面考虑  $a_0 < b_0$  的情形. 设  $\varepsilon$  是满足关系式  $\varepsilon < b_0 - a_0$  的任一正数. 由于  $F$  右连续, 故对于每个  $k \geq 1$ , 有  $\varepsilon_k > 0$  使

$$F(b_k + \varepsilon_k) - F(b_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

令

$$E_0 = [a_0 + \varepsilon, b_0]$$

$$E_k = (a_k, b_k + \varepsilon_k), k = 1, 2, \dots$$

则



$$E_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

于是由有限覆盖定理知, 存在  $n$  使

$$E_0 \subset \bigcup_{k=1}^n E_k$$

根据引理 2, 有

$$\begin{aligned} F(b_0) - F(a_0 + \varepsilon) &\leq \sum_{k=1}^n [F(b_k + \varepsilon_k) - F(a_k)] \\ &= \sum_{k=1}^n [F(b_k + \varepsilon_k) - F(b_k)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)] \\ &< \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)] \end{aligned}$$

在此不等式中令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 并注意到  $F$  的右连续性即得

$$F(b_0) - F(a_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

这就是所要证明的结论。

**定理 1**  $\mathcal{A}$  上的集函数  $P$  具有可列可加性。

**证** 设  $A_k \in \mathcal{A} (k=1, 2, \dots)$ , 诸  $A_k$  互不相交, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A \in \mathcal{A}$$

则由引理 1 有

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) \leq P(A), \quad n=1, 2, \dots$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leq P(A)$$

又由引理 3 有

$$P(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

由以上二式即得

$$P(A) = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

即  $P$  在  $\mathcal{A}$  上具有可列可加性。

设  $\mathcal{S}$  是由有限个左开右闭的有限区间的和集的全体所组成的环。易知  $\mathcal{S}$  中的集都可用有限个左开右闭的有限区间的直和表示，即  $\mathcal{S}$  中的集  $A$  都可表示为

$$A = \sum_{k=1}^n (a_k, b_k] \quad (4.2)$$

我们注意到，对于给定的  $A$ ，表达式 (4.2) 并不是唯一的。例如，设  $A = (0, 3]$ ，则  $A$  也可以表示为

$$\begin{aligned} A &= (0, 1] + (1, 3] \\ &= (0, 2] + (2, 3] \end{aligned} \quad (4.3)$$

引理 4 设  $F(x)$  是一个给定的分布函数， $A \in \mathcal{S}$  且由 (4.2) 表示，令

$$P(A) = \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)] \quad (4.4)$$

则由 (4.4) 式定义的  $\mathcal{S}$  上的集函数  $P$  有唯一确定的值。也就是说  $P(A)$  的值只与  $A$  有关而与  $A$  的表达式 (4.2) 的形式无关。

证 为区别起见，我们改用小写字母  $p$  来表示由 (4.1) 式定义的  $\mathcal{A}$  上的集函数，即当  $A = (a, b]$  时，

$$p(A) = F(b) - F(a)$$

于是如记  $A_k = (a_k, b_k]$ , 则 (4.4) 式可写为

$$P(A) = \sum_{k=1}^n p(A_k) \quad (4.5)$$

设  $A \in \mathcal{F}$ , 且

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad A_i \in \mathcal{A} \quad (4.6)$$

$$A = \sum_{j=1}^m B_j, \quad B_j \in \mathcal{A} \quad (4.7)$$

是  $A$  的相应于 (4.2) 式的两种表达式, 则

$$A_i = A_i \cap \sum_{j=1}^m B_j = \sum_{j=1}^m A_i \cap B_j$$

显然  $\mathcal{A}$  对交运算封闭, 故  $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ , 又  $P$  显然具有有限可加性, 故有

$$p(A_i) = \sum_{j=1}^m p(A_i \cap B_j)$$

故

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n p(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(A_i \cap B_j) \end{aligned} \quad (4.8)$$

同理, 当  $A$  由 (4.7) 式表示时, 有

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=1}^m p(B_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p(B_j \cap A_i) \end{aligned} \quad (4.9)$$

交换求和次序即可看到, (4.8) 式与 (4.9) 式所定义的  $P(A)$

是一致的。

例如，设  $A = (0, 3]$  由 (4.3) 式表示，则

$$\begin{aligned} P(A) &= P((0, 1] + (1, 3]) \\ &= [F(1) - F(0)] + [F(3) - F(1)] \\ &= F(3) - F(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P((0, 2] + (2, 3]) \\ &= [F(2) - F(0)] + [F(3) - F(2)] \\ &= F(3) - F(0) \end{aligned}$$

**引理 5** 对于任意给定的分布函数  $F(x)$ ，由 (4.4) 式定义的集函数是环  $\mathcal{S}$  上的测度。

**证**  $P$  的非负性是显然的。又空集  $\phi$  可看作是  $(a, a]$ ，故有

$$P(\phi) = F(a) - F(a) = 0$$

$P$  的有限可加性是显然的。事实上，设

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n A_i, \quad A_i \in \mathcal{S} \\ A_i &= \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \quad A_{ij} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

则

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}$$

于是由 (4.5) 式有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} p(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

下面证  $P$  的可列可加性。设

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$$

$$A_i = \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \quad A_{ij} \in \mathcal{A}$$

$$A = \sum_{k=1}^n B_k, \quad B_k \in \mathcal{A}$$

则

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \quad (4.10)$$

而

$$\begin{aligned} B_k &= B_k \cap \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} B_k \cap A_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B_k \cap \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} B_k \cap A_{ij} \end{aligned}$$

由于  $B_k \cap A_{ij} \in \mathcal{A}$ , 故由定理 1 有

$$P(B_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} P(B_k \cap A_{ij}) \quad (4.11)$$

由 (4.10) 及 (4.11) 并再次利用引理 1, 得

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} P(B_k \cap A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^n P(B_k \cap A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} P(A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

于是就证明了  $P$  的可列可加性, 因而证明了  $P$  是  $\mathcal{A}$  上的测度。

**定理 2** 设  $R = (-\infty, +\infty)$ ,  $\mathcal{B}$  是  $R$  中波莱尔集的全体,

则对于任意给定的分布函数 $F(x)$ ,在 $\mathcal{B}$ 上存在唯一的测度 $P$ ,使得

$$P((a, b]) = F(b) - F(a) \quad (4.12)$$

注: 这个测度与 $F(x)$ 有关, 如要强调这种关系, 可将它记为 $P_F$

证 根据引理4与引理5, 在环 $\mathcal{F}$ 上存在由(4.4)式定义的测度, 这个测度当然满足条件(4.12). 另一方面, 如果环 $\mathcal{F}$ 上的测度满足(4.12), 则由有限可加性知,  $\mathcal{F}$ 上的这个测度必须由(4.4)式定义. 于是就证明了在环 $\mathcal{F}$ 上存在唯一的测度 $P$ 使(4.12)式成立. 显然, 由(4.4)式定义的 $\mathcal{F}$ 上的测度是有限测度, 因此根据上节定理4,  $\mathcal{F}$ 上的这个测度 $P$ 可唯一地拓展到 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ 上去. 这个拓展测度就满足定理中的要求.

定义2 设 $F(x)$ 是任一分布函数,  $P$ 是由(4.4)式定义的环 $\mathcal{F}$ 上的测度, 则称 $P$ 由 $\mathcal{F}$ 拓展到 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ 的拓展测度为勒贝格-斯提杰测度(或由 $F(x)$ 引出的勒贝格-斯提杰测度).

上节的定理3表明,  $\mathcal{F}$ 上的这个测度 $P$ 实际上可以拓展到比 $\sigma(\mathcal{F})$ 更大的 $\sigma$ -环 $\mathcal{S}^*$ 上去. 我们也称 $P$ 由 $\mathcal{F}$ 拓展到 $\mathcal{S}^*$ 的拓展测度为勒贝格-斯提杰测度.

如果 $F(x) \equiv x$ , 则由它引出的勒贝格-斯提杰测度就是通常的勒贝格测度,  $\mathcal{S}^*$ 中的集就称为勒贝格可测集. 因为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^*$ , 所以波莱尔可测集都是勒贝格可测集. 勒贝格可测集的全体所成的类通常用 $\mathcal{L}$ 表示, 勒贝格测度则用 $m$ 表示.

综上所述, 勒贝格-斯提杰测度是定义在 $\mathcal{B}$ 上的测度, 由于它满足条件(4.12), 故它在任何有限区间上取有限值. 下面的定理表明, 这正是勒贝格-斯提杰测度的本质特征.



**定理 3** 设  $P$  是  $\mathcal{B}$  上的测度, 且对于任何有限区间  $[a, b]$  有

$$P([a, b]) < +\infty \quad (4.13)$$

则存在分布函数  $F(x)$ , 使得

$$P((a, b]) = F(b) - F(a) \quad (4.14)$$

且如不计一个常数, 则使上式成立的分布函数是唯一的.

使 (4.14) 式成立的分布函数称为  $P$  所确定的分布函数 (或  $P$  的分布函数).

证 任取定一个常数  $k$ , 令

$$F(x) = \begin{cases} P((k, x]), & \text{当 } x \geq k \\ -P((x, k]), & \text{当 } x < k \end{cases}$$

由于  $P$  在有限区间上取有限值, 故  $F(x)$  是  $R$  上的实值函数, 显然  $F(x)$  单调增加. 下面证明:

(1)  $F(x)$  右连续.

设  $x \geq k$ ,  $\{x_n\}$  是趋向于  $x$  的任一递减数列, 则  $\{(k, x_n]\}$  是单调减少的区间列, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k, x_n] = (k, x]$$

于是根据测度的下连续性有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P((k, x_n]) \\ &= P((k, x]) \\ &= F(x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

因为  $F(x)$  单调, 故存在右极限

$$F(x+0) = \lim_{x' \rightarrow x+0} F(x') \quad (4.16)$$

由 (4.15) 与 (4.16) 可知,  $F(x+0) = F(x)$ , 故  $F$  在  $x$  处右连续.

同理可证  $x < k$  的情况.

(2) 设  $a < k, b \geq k$  (其它情况与此类似), 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= P((k, b]) - [-P((a, k])] \\ &= P((k, b]) + P((a, k]) \\ &= P((a, k] + (k, b]) \\ &= P((a, b]) \end{aligned}$$

故 (4.14) 式成立.

(3) 设  $F_1(x)$  与  $F_2(x)$  是使 (4.14) 式成立的两个分布函数, 则当  $x \geq a$  时,

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_1(a) &= F_2(x) - F_2(a) \\ &= P((a, x]) \end{aligned}$$

即

$$F_1(x) = F_2(x) + F_1(a) - F_2(a)$$

当  $x < a$  时,

$$\begin{aligned} F_1(a) - F_1(x) &= F_2(a) - F_2(x) \\ &= P((x, a]) \end{aligned}$$

即

$$F_1(x) = F_2(x) + F_1(a) - F_2(a)$$

于是对一切  $x$  有

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

其中  $C = F_1(a) - F_2(a)$  为常数.

推论 定义在  $\mathcal{B}$  上且满足条件 (4.13) 的测度  $P$  是勒贝格-斯提杰测度, 它可由其分布函数所引出.

因此  $\mathcal{B}$  上的测度  $P$  是勒贝格-斯提杰测度的充要条件是它满足条件 (4.13).

注: 如果  $P$  是  $\mathcal{B}$  上的有限测度, 则

$$F(x) = P((-\infty, x]) \quad (4.17)$$

是  $P$  的一个分布函数。

事实上，当  $P$  全有限时，由 (4.17) 定义的  $F(x)$  是  $R$  上的实值函数。仿照上述定理中的讨论可以证明  $F(x)$  是非负单增的右连续函数并且满足条件 (4.14)，因而它是  $P$  的一个分布函数。

综上所述，我们得到如下结论：如果把相差一个常数的分布函数看成“相等”，则 (4.14) 式建立了  $R$  上的分布函数与  $\mathcal{B}$  上的满足条件 (4.13) 的测度（即勒贝格-斯提杰测度）之间的一一对应。

### 习 题 2.4

1. 设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0 \\ \frac{3}{2}x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \\ 3, & \text{当 } 2 < x < 3 \\ 4, & \text{当 } x \geq 3 \end{cases}$$

$P$  是由  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度，求下列集的测度：

- (1)  $[-1, 0]$ ;
- (2)  $[-1, 1]$ ;
- (3)  $[1, 2]$ ;
- (4)  $[2, 3]$ ;
- (5)  $[2, 3] \cup \{1\}$ ;
- (6)  $\{3\} \cup (2, 4]$ ;
- (7)  $\{x \mid |x| + 2x^2 > 1\}$ ;
- (8)  $(-\infty, +\infty)$ .

2. 设

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}, & n \leq x < n+1, n=0,1,2,\dots \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$P$  是由  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度。求单元集  $\{n\}$  的测度，其中  $n$  为任意整数。

3. 设  $P$  是分布函数  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度，证明

$$(1) P(\{x\}) = F(x) - F(x-0);$$

(2) 当且仅当  $P(\{x\}) = 0$  时， $F$  在  $x$  处连续；

$$(3) P((a, b)) = F(b-0) - F(a);$$

$$(4) P([a, b]) = F(b) - F(a-0);$$

$$(5) P([a, b)) = F(b-0) - F(a-0);$$

$$(6) P((-\infty, x]) = F(x) - F(-\infty);$$

$$(7) P((-\infty, x)) = F(x-0) - F(-\infty);$$

$$(8) P((x, \infty)) = F(\infty) - F(x);$$

$$(9) P([x, \infty)) = F(\infty) - F(x-0);$$

$$(10) P(\mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty).$$

4. 设  $P_1$  与  $P_2$  是  $\mathcal{B}$  上的两个有限测度。如果它们在  $(a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(a, \infty)$  这八种类型之一的所有端点为有理数的区间上相等，则它们在  $\mathcal{B}$  上相等。

5. 设  $F(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加的非负函数(未必右连续)，在  $\mathcal{A}$  (定义见引理 1) 上定义集函数如下：

$$P((a, b]) = F(b) - F(a)$$

(1)  $P$  是否具有可加性？

(2)  $P$  是否具有可列可加性？

6. 设  $F(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加的非负左连续函数， $\mathcal{A}$  是所有有限的左闭右开区间  $[a, b)$  的全体所组成的类，在  $\mathcal{A}$  上定义集函数  $P$  如下：

$$P([a, b)) = F(b) - F(a)$$

则  $P$  具有可列可加性。

## 第三章 可测函数

### § 3.1 映射

**定义1** 设  $A$ 、 $B$  是两个非空集，如果存在一个法则  $f$ ，使得  $A$  中的每一个元素  $a$ ，都有  $B$  中唯一的一个元素  $b$  与之对应，就称  $f$  是一个从  $A$  到  $B$  中的映射，并记为

$$f: A \rightarrow B$$

如果元素  $a$  对应于元素  $b$ ，则  $b$  叫做  $a$  的象或值，而  $a$  叫做  $b$  的原象，记为  $b = f(a)$ 。

当  $f$  是从  $A$  到  $B$  的映射时，称  $A$  为映射  $f$  的定义域，而把  $A$  的所有元素的象所组成的集称为  $f$  的值域，记为  $f(A)$ ，即

$$f(A) = \{b \mid b = f(a), a \in A\}$$

注意， $f(a)$  是  $B$  中的一个元素，而  $f(A)$  则是  $B$  中的一个子集，即  $f(A) \subset B$ ，二者不可混淆。

如果  $B$  是实数或广义实数的集，则从  $A$  到  $B$  的映射称为定义在  $A$  上的函数。

**定义2** 设有两个映射  $f$  与  $g$ ，如果  $f$  的定义域与  $g$  的定义域都是同一集  $A$ ，且对于所有的  $a \in A$ ，都有  $f(a) = g(a)$ ，则称  $f$  与  $g$  相等，记为  $f = g$ 。

如果映射  $f: A \rightarrow B$ ，对于任意的  $a \in A$ ，都有  $f(a) = b_0$ ，这里  $b_0$  是  $B$  中的一个固定元素，则称  $f$  为以  $b_0$  为值的常值映射。

若  $A = B$ ，且对于所有的  $a \in A$ ， $f(a) = a$ ，则称  $f$  为  $A$  的恒等映射，用  $I_A$  来表示。

定义3 设  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  是两个映射, 用

$$h(a) = g(f(a)) \quad (a \in A)$$

定义的映射

$$h: A \rightarrow C$$

称为  $f$  与  $g$  的复合映射, 记为  $h = f \circ g$ .

定义4 设  $f, g$  是定义在集  $A$  上的两个广义实值函数, 则函数

$$h(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(\omega) = \pm\infty, \text{ 而 } g(\omega) = \mp\infty \quad (\omega \in A) \\ f(\omega) + g(\omega), & \text{对于其它情况} \end{cases}$$

$$s(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(\omega) = g(\omega) = \pm\infty \\ f(\omega) - g(\omega), & \text{对于其它情况} \end{cases}$$

分别称为  $f$  与  $g$  的和与差, 并记为  $f+g$  与  $f-g$ .

两个函数的积、商以及函数的绝对值, 函数列的收敛等概念都可类似地定义.

定义5 设  $\Omega$  是一个空间,  $A \subset \Omega$ , 则称函数

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \omega \in A \\ 0, & \text{当 } \omega \notin A \end{cases}$$

为集  $A$  的特征函数.

显然子集  $A$  完全由它的特征函数所确定, 也就是说,  $A=B$  的充要条件是

$$\chi_A(\omega) \equiv \chi_B(\omega)$$

特征函数与集之间有下面一些常见的重要关系:

1°.  $A = \Omega$  等价于  $\chi_A(\omega) \equiv 1$ ;

$A = \phi$  等价于  $\chi_A(\omega) \equiv 0$ .

2°.  $A \subset B$  等价于  $\chi_A(\omega) \leq \chi_B(\omega)$ ;

$A = B$  等价于  $\chi_A(\omega) = \chi_B(\omega)$ .

3°.  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$ ;



$$\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B;$$

$$4^\circ. \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B.$$

**定义6** 设  $f: A \rightarrow B$ , 如果  $f(A) = B$ , 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  上的映射 (或称完全映射).

如果当  $a \neq a'$  时恒有  $f(a) \neq f(a')$ , 则称  $f$  为单调映射.

如果映射  $f: A \rightarrow B$  是由  $A$  到  $B$  上的单调映射, 则称  $f$  为  $A$  到  $B$  的一一映射.

**定义7** 设  $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  是从  $\Omega$  到  $\bar{\Omega}$  的一个映射,  $\bar{A} \subset \bar{\Omega}$ , 则称  $\Omega$  中的集

$$\{\omega \mid f(\omega) \in \bar{A}\}$$

为集  $\bar{A}$  关于  $f$  的原象, 记为  $f^{-1}(\bar{A})$ .

设  $A \subset \Omega$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的函数,  $[a, b]$  是一个区间, 则记

$$\{\omega \mid a \leq f(\omega) \leq b, \omega \in A\} = A(a \leq f \leq b)$$

如果  $A = \Omega$ , 则上述集也简记为  $\{a \leq f \leq b\}$ .

$A(f \leq a)$ ,  $\{f \leq a\}$  等记号的意义可以类似地理解.

**定义8** 设  $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  是从  $\Omega$  到  $\bar{\Omega}$  的一个映射,  $\bar{\mathcal{F}}$  是  $\bar{\Omega}$  中的集类, 则称  $\Omega$  中的集类

$$\{f^{-1}(\bar{A}) \mid \bar{A} \in \bar{\mathcal{F}}\}$$

为集类  $\bar{\mathcal{F}}$  关于  $f$  的原象, 记为  $f^{-1}(\bar{\mathcal{F}})$ .

**定理1** 原象具有下列性质:

$$(1) \quad f^{-1}(\bar{A} \cup \bar{B}) = f^{-1}(\bar{A}) \cup f^{-1}(\bar{B}) \quad (1.1)$$

一般有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\bar{A}_n) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \omega \in f^{-1}(\bar{A} \cup \bar{B}) &\iff f(\omega) \in \bar{A} \cup \bar{B} \\ &\iff f(\omega) \in \bar{A} \text{ 或 } f(\omega) \in \bar{B} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \text{ 或 } \omega \in f^{-1}(\overline{B})$$

$$\Leftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \cup f^{-1}(\overline{B})$$

故 (1.1) 式成立. 同理可证 (1.2) 式.

$$(2) f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B}) \quad (1.3)$$

一般有

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \omega \in f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}) &\Leftrightarrow f(\omega) \in \overline{A} \cap \overline{B} \\ &\Leftrightarrow f(\omega) \in \overline{A} \text{ 且 } f(\omega) \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \text{ 且 } \omega \in f^{-1}(\overline{B}) \\ &\Leftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B}) \end{aligned}$$

故 (1.3) 式成立. 同理可证 (1.4) 式.

$$(3) f^{-1}(\overline{A} + \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) + f^{-1}(\overline{B}) \quad (1.5)$$

一般有

$$f^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) \quad (1.6)$$

证 由 (1.1) 式有

$$f^{-1}(\overline{A} + \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) \cup f^{-1}(\overline{B})$$

由 (1.3) 有

$$f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

故 (1.5) 式成立. 同理可证 (1.6) 式.

$$(4) f^{-1}(\overline{A}') = [f^{-1}(\overline{A})]^\prime \quad (1.7)$$

证 由 (1.5) 有

$$f^{-1}(\overline{A}) + f^{-1}(\overline{A}') = f^{-1}(\overline{A} + \overline{A}') = f^{-1}(\Omega) = \Omega$$

故 (1.7) 式成立.

$$(5) f^{-1}(\overline{A} - \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) - f^{-1}(\overline{B}) \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{证 } f^{-1}(\overline{A} - \overline{B}) &= f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}') \\ &= f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f^{-1}(\overline{A}) \cap [f^{-1}(\overline{B})]' \\
 &= f^{-1}(\overline{A}) - f^{-1}(\overline{B})
 \end{aligned}$$

**定理 2** 设  $f: \Omega \rightarrow \overline{\Omega}$  是从  $\Omega$  到  $\overline{\Omega}$  的映射,  $\overline{\mathcal{F}}_1, \overline{\mathcal{F}}_2$  与  $\overline{\mathcal{F}}$  是  $\overline{\Omega}$  中的集类,

(1) 如果  $\overline{\mathcal{F}}_1 \subset \overline{\mathcal{F}}_2$ , 则  $f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}) \subset f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}_1)$ ;

(2) 如果  $\overline{\mathcal{F}}$  是  $\sigma$ -环 (代数), 则  $f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$  也是  $\sigma$ -环 (代数),

**证** (1) 是显然的, (2) 可直接由 (1.2), (1.7) 与 (1.8) 式推出, 例如, 设  $A_n \in f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$  则存在  $\overline{A}_n \in \overline{\mathcal{F}}$ , 使

$$A_n = f^{-1}(\overline{A}_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

由于  $\overline{\mathcal{F}}$  是  $\sigma$ -环, 故  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \in \overline{\mathcal{F}}$ , 于是由 (1.2) 式有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) \in f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$$

故  $f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$  对可列和运算是封闭的. 同理可证  $f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$  对差运算的封闭性.

**定理 3** 设  $f: \Omega \rightarrow \overline{\Omega}$  是从  $\Omega$  到  $\overline{\Omega}$  的映射,  $\overline{\mathcal{F}}$  是  $\overline{\Omega}$  中的集类, 则

$$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathcal{F}})) = \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})) \quad (1.9)$$

$$f^{-1}(\mathcal{P}(\overline{\mathcal{F}})) = \mathcal{P}(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})) \quad (1.10)$$

**证** 因为  $\overline{\mathcal{F}} \subset \sigma(\overline{\mathcal{F}})$  故

$$f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}) \subset f^{-1}(\sigma(\overline{\mathcal{F}}))$$

由定理 2 知,  $f^{-1}(\sigma(\overline{\mathcal{F}}))$  是  $\sigma$ -代数, 故有

$$\sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})) \subset f^{-1}(\sigma(\overline{\mathcal{F}})) \quad (1.11)$$

下面证明相反的包含关系:

$$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathcal{F}})) \subset \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})) \quad (1.12)$$

令

$$\overline{\mathcal{A}} = \{ \overline{A} \mid \overline{A} \subset \overline{\Omega}, f^{-1}(\overline{A}) \in \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})) \}$$

下面证明  $\overline{\mathcal{A}}$  是  $\sigma$ -代数:

1°. 设  $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$  即

$$f^{-1}(\overline{A}) \in \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$$

由 (1.7) 式及  $\sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$  为  $\sigma$ -代数的条件有

$$f^{-1}(\overline{A}') = [f^{-1}(\overline{A})]' \in \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$$

故  $\overline{A}' \in \overline{\mathcal{A}}$ , 即  $\overline{\mathcal{A}}$  对补运算封闭.

2°. 设  $\overline{A}_n \in \overline{\mathcal{A}}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 即

$$f^{-1}(\overline{A}_n) \in \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$$

于是

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) \in \sigma[f^{-1}(\overline{\mathcal{F}})]$$

故  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \in \overline{\mathcal{A}}$ , 即  $\overline{\mathcal{A}}$  对可列和运算封闭.

由 1° 与 2° 知,  $\overline{\mathcal{A}}$  是  $\sigma$ -代数. 现在回到 (1.12) 式的证明.

设  $\overline{A} \in \overline{\mathcal{F}}$ , 则

$$f^{-1}(\overline{A}) \in f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}) \subset \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$$

故  $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$ , 即  $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{A}}$ . 因为  $\overline{\mathcal{A}}$  是  $\sigma$ -代数, 故  $\sigma(\overline{\mathcal{F}}) \subset \overline{\mathcal{A}}$ , 即对于任何  $\overline{A} \in \sigma(\overline{\mathcal{F}})$ , 有

$$f^{-1}(\overline{A}) \in \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$$

即

$$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathcal{F}})) \subset \sigma(f^{-1}(\overline{\mathcal{F}}))$$

(1.9) 式证毕. 同理可证 (1.10).

### 习 题 3.1

1. 设  $f: A \rightarrow B$  是从集  $A$  到集  $B$  中的映射,  $T$  是任一指标,  $B_t \subset B$ ,

( $t \in T$ ), 证明

$$(1) f^{-1} \left( \bigcup_{t \in T} B_t \right) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(B_t),$$

$$(2) f^{-1} \left( \bigcap_{t \in T} B_t \right) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(B_t).$$

2. 设  $f: A \rightarrow B$  是从集  $A$  到集  $B$  中的映射. 下列各式是否成立? 如不成立应如何修改:

$$(1) f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$(2) f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2);$$

$$(3) f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2);$$

$$(4) f(A_1 - A_2) = f(A_1) - f(A_2);$$

$$(5) f(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n);$$

$$(6) f^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(B_n);$$

$$(7) f(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n);$$

$$(8) f^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(B_n).$$

3. 证明 (1.10) 式.

4. 设  $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  是从  $\Omega$  到  $\bar{\Omega}$  中的映射.  $\bar{\mathcal{F}}_1, \bar{\mathcal{F}}_2$  与  $\bar{\mathcal{F}}$  是  $\bar{\Omega}$  中的集类.

(1) 如果  $f^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_1) \subset f^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_2)$ , 是否一定有  $\bar{\mathcal{F}}_1 \subset \bar{\mathcal{F}}_2$ ?

(2) 如果  $f^{-1}(\bar{\mathcal{F}})$  是  $\sigma$ -代数, 是否  $\bar{\mathcal{F}}$  一定是  $\sigma$ -代数?

5. 设  $\{A_n\}$  是一列集. 证明:

$$(1) \chi_{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}}(\omega) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(\omega)};$$

$$(2) \chi_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(\omega);$$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  存在的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(\omega)$  存在, 而且当极限存在

时, 有

$$\chi_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(\omega)$$

6. 设  $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ , 证明

$$\chi_A(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(\omega)$$

7. 设  $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  是从  $\Omega$  到  $\bar{\Omega}$  的映射, 下面的关系是否成立:

$$A = f^{-1}(\bar{A}) \iff f(A) = \bar{A}$$

### § 3.2 可测函数的定义及其基本性质

**定义 1** 设  $\mathcal{F}$  是空间  $\Omega$  的某些子集组成的  $\sigma$ -代数,  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的测度, 如果把  $\Omega$  与  $\mathcal{F}$  合在一起来考虑, 就称它为可测空间, 记为  $(\Omega, \mathcal{F})$ .  $\mathcal{F}$  中的元素 (集) 称为  $\mathcal{F}$ -可测集 (简称可测集).

如果把  $\Omega$ 、 $\mathcal{F}$  与  $P$  合在一起来考虑, 就称它为测度空间, 记为  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

如果测度  $P$  是有限 ( $\sigma$ -有限) 的, 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是有限 ( $\sigma$ -有限) 测度空间; 如果  $P$  是完全测度, 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为完全测度空间; 如果  $P$  是  $\mathcal{F}$  上的概率测度, 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间.

**定义 2** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是给定的可测空间,  $f$  是定义在  $\Omega$  上的广义实值函数, 如果对于任何实数  $a$  都有

$$\{\omega \mid f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \quad (2.1)$$

则称  $f$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的可测函数, 或  $\mathcal{F}$ -可测函数.

特别,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  称为波莱尔可测空间, 其上的实值可测函数称为波莱尔可测函数.  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  与  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$  分别称为勒贝格可测空间和勒贝格测度空间, 其上的可测函数称为勒贝格可测函数.

如果  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一概率空间, 则定义在  $\Omega$  上的实值可测函数也称为随机变量.

今后当我们提到若干个可测函数时, 如没有特别的说明, 则总是假定它们是同一可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的可测函数.



**定义 3** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $f(\omega)$  是定义在  $A$  上的广义实值函数, 如果对于任何实数  $a$ , 都有

$$A(f \leq a) \in \mathcal{F} \quad (2.2)$$

则称  $f$  是  $A$  上的可测函数, 也称  $f$  在  $A$  上可测.

定义 2 就是本定义中  $A = \Omega$  的情况.

**例 1** 设  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的一切子集所成的类, 则定义在  $\Omega$  上的任何广义实值函数都是可测函数.

**例 2** 对于任何可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$ , 常值函数  $f(\omega) \equiv a$  是可测函数.

**例 3** 设  $A \subset \Omega$ , 则  $A$  的特征函数  $\chi_A(\omega)$  可测的充要条件是  $A \in \mathcal{F}$ .

**证** 这是因为

$$\{\omega \mid \chi_A(\omega) \leq a\} = \begin{cases} \phi, & \text{当 } a < 0 \\ A', & \text{当 } 0 \leq a < 1 \\ \Omega, & \text{当 } a \geq 1 \end{cases}$$

**例 4** 设  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\phi, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}$ ,  $f(\omega) = \chi_{[0,1]}(\omega)$ . 易知  $f$  为  $\mathcal{F}_2$ -可测, 但不是  $\mathcal{F}_1$ -可测.

一般地说, 设  $\mathcal{F}_1$  与  $\mathcal{F}_2$  是同一空间  $\Omega$  的某些子集所组成的两个  $\sigma$ -代数, 如果  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$  则  $\mathcal{F}_1$ -可测的函数必定  $\mathcal{F}_2$ -可测, 而反之则不成立.

例如, 由于  $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ , 故波莱尔可测函数一定是勒贝格可测函数; 而勒贝格可测函数却未必是波莱尔可测函数.

**定理 1** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $f$  是定义在  $\Omega$  上的实值函数, 则  $f$  可测的充要条件是对任意的  $B \in \mathcal{B}$ , 有

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad (2.3)$$

**证** 充分性: 设 (2.3) 式对任何  $B \in \mathcal{B}$  都成立, 在 (2.3) 中取  $B = (-\infty, a]$ , 即得 (2.1).

必要性：令

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \mid -\infty < a \leq b < +\infty\}$$

因为

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, b]) &= f^{-1}((-\infty, b] - (-\infty, a]) \\ &= f^{-1}((-\infty, b]) - f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

故  $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ 。因为  $\mathcal{F}$  是  $\sigma$ -代数，故  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{F}$ 。

但  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ ，由上节定理 3 有

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = f^{-1}(\mathcal{B})$$

故  $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$ ，即对任意的  $B \in \mathcal{B}$  有  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ 。

**定义 4** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是两个可测空间， $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  是从  $\Omega_1$  到  $\Omega_2$  的映射，如果对于每个  $A \in \mathcal{F}_2$  有  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ ，则称  $f$  是从  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  到  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  的可测映射，记为

$$f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$$

由定理 1 知， $(\Omega, \mathcal{F})$  上的实值可测函数就是从  $(\Omega, \mathcal{F})$  到波莱尔可测空间  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  的可测映射。

**推论** 设  $f$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的实值可测函数， $g$  是  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  上的波莱尔可测函数，则复合函数  $g \circ f$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的可测函数。

**证** 对于任意的  $B \in \mathcal{B}$  有

$$\{\omega \mid g(f(\omega)) \in B\} = \{\omega \mid f(\omega) \in g^{-1}(B)\} \in \mathcal{F} \quad (2.4)$$

这里由于  $g$  波莱尔可测，故  $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ ，于是根据 (2.3) 式即得 (2.4) 式。

**定理 2** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间， $f$  是  $\Omega$  上的广义实值函数，则  $f$  可测的充要条件是对任何  $B \in \mathcal{B}$  有

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad (2.5)$$

且

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \{\omega \mid f(\omega) = -\infty\} \in \mathcal{F} \quad (2.6)$$

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \{\omega \mid f(\omega) = +\infty\} \in \mathcal{F} \quad (2.7)$$

证 充分性：设  $a$  是任意实数，则

$$\begin{aligned}\{\omega | f(\omega) \leq a\} &= \{\omega | f(\omega) = -\infty\} + \{\omega | -\infty < f(\omega) \leq a\} \\ &= f^{-1}(\{-\infty\}) + f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

必要性：设  $f(\omega)$  可测，则

$$\begin{aligned}f^{-1}(\{-\infty\}) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega | f(\omega) \leq -n\} \in \mathcal{F} \\ f^{-1}(\{+\infty\}) &= \Omega - \{\omega | f(\omega) < +\infty\} \\ &= \Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega | f(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

(2.5) 式的证明同定理 1.

设  $\bar{R}$  是广义实数集，令

$$\hat{\mathcal{B}} = \{A | A \in \mathcal{B}, \text{ 或 } A = E \cup \{+\infty\}\}$$

或  $A = E \cup \{-\infty\}$ ，其中  $E \in \mathcal{B}$

易知  $\hat{\mathcal{B}}$  是  $\bar{R}$  中的  $\sigma$ -代数。我们称  $\hat{\mathcal{B}}$  中的集为广义波莱尔集，

$(\bar{R}, \hat{\mathcal{B}})$  则称为广义波莱尔可测空间。

由定理 2 知， $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义实值可测函数就是从  $(\Omega, \mathcal{F})$  到  $(\bar{R}, \hat{\mathcal{B}})$  的可测映射。

显然，以上定理可推广如下：设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间， $A \in \mathcal{F}$ ， $f$  是定义在  $A$  上的广义实值函数，则  $f$  在  $A$  上可测的充要条件是

$$A(f = -\infty) \in \mathcal{F}, \quad A(f = +\infty) \in \mathcal{F}$$

且对于任何  $B \in \mathcal{B}$

$$A(f \in B) \in \mathcal{F} \tag{2.8}$$

推论 设  $f$  是  $A$  上的广义实值可测函数，则对于任何广义实数  $a$ ， $A(f = a) \in \mathcal{F}$ 。

由以上定理 2 的推广可知， $A$  上的广义实值可测函数就是从  $(A, A \cap \mathcal{F})$  到  $(\bar{R}, \hat{\mathcal{B}})$  的可测映射。

定理 3 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间， $A \in \mathcal{F}$ ， $f$  是定义在

$A$ 上的广义实值函数, 则  $f$  在  $A$  上可测的充要条件是下列条件之一满足:

1°. 对任何实数  $a$ ,  $A(f < a) \in \mathcal{F}$ ;

2°. 对任何实数  $a$ ,  $A(f \geq a) \in \mathcal{F}$ ;

3°. 对任何实数  $a$ ,  $A(f > a) \in \mathcal{F}$ .

证 必要性可直接由 (2.8) 式推出, 下面证明充分性.

(1) 由于

$$A(f \leq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

故如果 1° 成立, 则  $A(f < a + \frac{1}{n}) \in \mathcal{F}$ , 因而  $A(f \leq a) \in \mathcal{F}$ , 即  $f$  可测.

(2) 由于

$$A(f < a) = A - A(f \geq a)$$

故由 2° 可推出 1°, 因而推  $f$  的可测性.

(3) 由于

$$A(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$$

故由 3° 可推出 2°, 因而推出  $f$  的可测性.

**定理 4** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是一可测空间,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的可测函数. 如果  $E \in \mathcal{F}$ , 且  $E \subset A$ , 则  $f$  作为  $E$  上的函数时, 它是  $E$  上的可测函数.

证 对于任何实数  $a$ , 由于

$$E(f \leq a) = A(f \leq a) \cap E$$

而  $A(f \leq a)$  和  $E$  都是可测集, 故  $E(f \leq a)$  是可测集, 即  $f$  作为  $E$  上的函数时, 它是  $E$  上的可测函数.

**定理 5** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $A \subset \Omega$ ,  $f(\omega)$  是定义在  $A$  上的广义实值函数, 而

$$A = \bigcup_k A_k \quad (2.9)$$

如果  $f$  在每个  $A_k$  上可测, 则  $f$  在  $A$  上也可测.

注: 记号  $\bigcup_k$  表示对有限项或可列项求和, 于是 (2.9) 式表示  $A$  是有限个或可列个集  $A_k$  的和集, 符号  $\sum_k$  有类似的意义.

证 这是因为对于任何实数  $a$ , 有

$$A(f \leq a) = \bigcup_k A_k(f \leq a)$$

**定理 6** 设  $f(\omega)$  是定义在  $A$  上的可测函数,  $k$  是任意一个实数, 则下列函数都是可测函数:

- (1)  $f(\omega) + k$ ;                      (2)  $kf(\omega)$ ;  
 (3)  $|f(\omega)|$ ;                        (4)  $f^2(\omega)$ ;  
 (5)  $\frac{1}{f(\omega)}$  (设  $f(\omega) \neq 0$ ).

证 (1) 由

$$A(f + k \leq a) = A(f \leq a - k)$$

即得  $f(\omega) + k$  的可测性.

(2) 当  $k = 0$  时,  $kf(\omega)$  恒取 0 值, 故它是可测函数. 当  $k \neq 0$  时, 由

$$A(kf \leq a) = \begin{cases} A\left(f \leq \frac{a}{k}\right), & \text{当 } k > 0 \\ A\left(f \geq \frac{a}{k}\right), & \text{当 } k < 0 \end{cases}$$

即得  $kf(\omega)$  的可测性.

(3) 从

$$A(|f| \leq a) = \begin{cases} \phi, & \text{当 } a < 0 \\ A(f \leq a) \cap A(f \geq -a), & \text{当 } a \geq 0 \end{cases}$$

知  $|f(\omega)|$  是一可测函数.

(4) 从

$$A(f^2 \leq a) = \begin{cases} \phi, & \text{当 } a < 0 \\ A(|f| \leq \sqrt{a}), & \text{当 } a > 0 \end{cases}$$

知  $f^2(\omega)$  是一可测函数。

(5) 因  $f(\omega) \neq 0$ , 故

$$A\left(\frac{1}{f} \leq a\right) = \begin{cases} A(f < 0), & \text{当 } a = 0 \\ A(f < 0) \cap A\left(f \geq \frac{1}{a}\right), & \text{当 } a < 0 \\ A(f < 0) + A(f > 0) \cap A\left(f \geq \frac{1}{a}\right), & \text{当 } a > 0 \end{cases}$$

由此可知  $f(\omega)$  是一可测函数。

引理 1 设  $f(\omega)$  与  $g(\omega)$  是定义在  $A$  上的两个可测函数, 则  $A(f > g)$  是一可测集。

证 设有理数的全体是

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

根据有理数的稠密性有

$$A(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(f > r_k) \cap A(g < r_k)$$

由定理 3 知,  $A(f > r_k)$  与  $A(g < r_k)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 都是可测集, 故  $A(f > g)$  是可测集。

定理 7 设  $f(\omega)$  与  $g(\omega)$  是定义在  $A$  上的两个可测函数, 则下列函数都是  $A$  上的可测函数:

$$(1) f(\omega) - g(\omega);$$

$$(2) f(\omega) + g(\omega);$$

$$(3) f(\omega) \cdot g(\omega);$$

$$(4) \frac{f(\omega)}{g(\omega)} \text{ (设 } g(\omega) \neq 0 \text{)};$$

$$(5) \max(f(\omega), g(\omega)), \min(f(\omega), g(\omega)).$$

证 (1) 先就  $f, g$  均为实值函数的情况来证明。因为根据定理 6, 对于任意实数  $a$ ,  $a + g(\omega)$  是可测的, 故由引理 1,  $A(f > a + g)$  是一可测集, 于是由



$$A(f - g > a) = A(f > a + g)$$

及定理 3 即可推出  $f - g$  可测性.

在  $f(\omega)$ ,  $g(\omega)$  为广义实值函数的情况, 令

$$E_{11} = A(f = -\infty, g = -\infty), E_{12} = A(f = -\infty, g = +\infty)$$

$$E_{21} = A(f = +\infty, g = -\infty), E_{22} = A(f = +\infty, g = +\infty)$$

$$E = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$$

则在  $A - E$  上  $f, g$  均取有限值且可测, 故  $f - g$  在  $A - E$  上可测, 在  $E$  上有

$$f(\omega) - g(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \omega \in E_{11} \\ -\infty, & \text{当 } \omega \in E_{12} \\ +\infty, & \text{当 } \omega \in E_{21} \\ 0, & \text{当 } \omega \in E_{22} \end{cases}$$

由于  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  都是可测集, 故  $f - g$  是  $E$  上的可测函数, 于是  $f - g$  在  $A = (A - E) + E$  上可测.

(2) 由定理 6 知,  $-g(\omega)$  是可测函数, 于是由

$$f(\omega) + g(\omega) = f(\omega) - [-g(\omega)]$$

及 (1) 知,  $f(\omega) + g(\omega)$  是  $A$  上的可测函数.

(3) 由

$$f(\omega) \cdot g(\omega) = \frac{1}{4} \{ [f(\omega) + g(\omega)]^2 - [f(\omega) - g(\omega)]^2 \}$$

及定理 6 即可推出  $f(\omega) \cdot g(\omega)$  的可测性.

(4) 因为  $g(\omega) \neq 0$ , 故由 (3) 及定理 6 知,

$$\frac{f(\omega)}{g(\omega)} = f(\omega) \cdot \frac{1}{g(\omega)}$$

是  $A$  上的可测函数.

(5) 对于任何  $a$  有

$$A(\max(f, g) \leq a) = A(f \leq a) \cap A(g \leq a)$$

$$A(\min(f, g) \leq a) = A(f \leq a) \cup A(g \leq a)$$

故 $\max(f, g)$ 与 $\min(f, g)$ 都是 $A$ 上的可测函数.

推论 设 $f(\omega)$ 和 $g(\omega)$ 是定义在 $A$ 上的两个可测函数,  $\alpha, \beta$ 是两个实数, 则 $\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)$ 是 $A$ 上的可测函数.

定义5 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间,  $A, A_k \in \mathcal{F} (k=1, 2, \dots, n)$ , 且

$$A_i \cap A_j = \phi (i \neq j), \sum_{k=1}^n A_k = A$$

$f(\omega)$ 是定义在 $A$ 上的函数, 它在集 $A_k$ 上取实常值 $\alpha_k$ , 而在 $\sum_{k=1}^n A_k$ 外为零, 这种函数称为 $A$ 上的简单函数.

显然简单函数 $f(\omega)$ 可表示为

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(\omega)$$

故它是 $A$ 上的可测函数.

定义6 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一测度空间,  $p(\omega)$ 是关于 $\omega$ 的一个命题,  $\omega \in A \subset \Omega$ , 如果 $\{\omega | p(\omega) \text{不成立}, \omega \in A\}$ 是一个 $P$ -零集, 则称 $p(\omega)$ 在 $A$ 上关于测度 $P$ 几乎处处成立, 也称 $p(\omega)$ 关于测度 $P$ 对 $A$ 中几乎所有的 $\omega$ 成立.

例如, 设 $f, g$ 是定义在 $A$ 上的两个函数, 如果 $A(f \neq g)$ 是一个 $P$ -零集, 则称 $A$ 上“ $f$ 与 $g$ 关于测度 $P$ 几乎处处相等”, 并用记号 $f \doteq g [P]$ 来表示. 其中等号上加点“.”表示等号几乎处处成立, 后面加“ $P$ ”表示“几乎处处”是关于 $P$ 而言的. 如果在整个讨论过程中, 只出现一个测度, “关于测度 $P$ ”一词就可省略, 相应的符号也简记为“ $\doteq$ ”,  $f \doteq g$ 也称为 $f$ 对等于 $g$ .

类似, 如果 $A(f > g)$ 是一个 $P$ -零集, 则称在 $A$ 上“ $f$ 几乎处处(关于 $P$ )大于 $g$ ”, 记为 $f \dot{>} g [P]$ 或简记为 $f \dot{>} g$ .

又如, 如果 $A(|f| = +\infty)$ 是一零集, 则称 $f$ 在 $A$ 上几乎处处有限.

“几乎处处”一词也可用缩写“a.e.”来表示,例如 $f \doteq g [P]$ 也可记为“ $f = g \text{ a.e. } [P]$ ”。

**定理 8** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完全测度空间。

1°. 如果 $A_0$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的零集,则定义在 $A_0$ 上的任何函数都是 $A_0$ 上的可测函数。

2°. 设 $A \subset \Omega$ ,  $f, g$ 是定义在 $A$ 上的函数,如果在 $A$ 上 $f$ 几乎处处等于 $g$ ,则当 $f$ 是 $A$ 上的可测函数时, $g$ 也是 $A$ 上的可测函数。

证: 1°. 设 $f$ 定义在 $A_0$ 上,  $P(A_0) = 0$ , 对于任何 $a$ , 有

$$A_0(f \leq a) \subset A_0$$

由于测度是完全的,故 $A_0$ 的任何子集都可测,所以 $f$ 是 $A_0$ 上的可测函数。

2°. 记 $A_0 = A(f \neq g)$ ,  $A_1 = A(f = g)$ , 由假设 $A_0$ 是零集,如果 $f$ 在 $A$ 上可测,则 $A$ 是可测集,因而 $A_1 = A - A_0$ 也是可测集。因为 $A_1 \subset A$ ,故 $f$ 在 $A_1$ 上可测,而且在 $A_1$ 上, $f = g$ ,故 $g$ 在 $A_1$ 上也可测。因为 $A_0$ 是零集,故 $g$ 在 $A_0$ 上可测,从而 $g$ 在 $A = A_1 \cup A_0$ 上可测。

### 习 题 3.2

1. 设 $f$ 是定义在 $\Omega$ 上的实值函数,则 $f$ 为 $\mathcal{F}$ 可测的充要条件是下列条件之一满足:

(1) 对于任意实数 $a, b(a < b)$ ,  $f^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$

(2) 对于任意实数 $a, b(a < b)$ ,  $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{F}$

(3) 对于任意实数 $a, b(a < b)$ ,  $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{F}$

(4) 对于任意实数 $a, b(a < b)$ ,  $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$

2. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, $f$ 是定义在 $\Omega$ 上的实值函数,如果对于任何实数 $a$ ,有 $\{f = a\} \in \mathcal{F}$ , $f$ 是否一定 $\mathcal{F}$ -可测?

3. 广义实值函数的可测性是否可以这样定义:如果对于任何实

数  $a$ , 都有

$$f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$$

则称  $f$  为  $\mathcal{F}$ -可测.

4. 如果  $f$  是定义在  $\Omega$  上的广义实值可测函数, 第一题中的结论是否仍成立?

5. 如果  $f$  是广义实值函数, 定理 1 的充分性部分是否成立? 必要性部分是否成立?

6. 设  $f$  与  $g$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的可测函数,  $A \in \mathcal{F}$ , 令

$$h(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{如果 } \omega \in A \\ g(\omega), & \text{如果 } \omega \in A' \end{cases}$$

证明  $h$  是可测函数.

7. 设  $g$  是从  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  到  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  的可测映射,  $f$  是  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  到  $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$  的可测映射, 则复合映射  $f \circ g$  是从  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  到  $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$  的可测映射.

8. 设  $f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是否对于所有的  $A \in \mathcal{F}_1$  有  $f(A) \in \mathcal{F}_2$ ? 考虑如下的例子: 设  $\mathcal{F}_2 = \{\phi, \Omega_2\}$ , 取  $A \in \mathcal{F}_1$  使  $f(A)$  是  $\Omega_2$  的非空真子集.

9. 设  $A \subset \Omega$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的实值函数, 如果对于任意实数  $a$ ,  $A(f \leq a) \in \mathcal{F}$ , 则  $A \in \mathcal{F}$ .

10. 如果  $f$  是  $A$  上的广义实值函数, 上题的结论是否成立?

11. 证明  $A$  上的两个简单函数的乘积以及有限个简单函数的线性组合仍为  $A$  上的简单函数.

12. 设  $f(\omega)$  与  $g(\omega)$  是定义在  $A$  上的两个可测函数, 证明下列集都是可测集:

- (1)  $A(f \geq g)$ ;                      (2)  $A(f \leq g)$ ;  
(3)  $A(f < g)$ ;                      (4)  $A(f = g)$ .

13.  $f$  为  $A$  上的可测函数的充要条件是, 对一切有理数  $r$ ,  $A(f < r)$  是可测集.

14. 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $A \subset \Omega$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的函数, 而

$$A = \bigcup_{i \in T} A_i,$$

其中  $T$  是不可列的指标集, 如果  $f$  在每个  $A_i$  上可测, 是否  $f$  一定在  $A$  上可测?

15. (1) 设  $f^2$  是可测函数, 问  $f$  是否一定是可测函数?

(2) 设  $f^3$  是可测函数, 问  $f$  是否一定是可测函数?

### § 3.3 可测函数列的收敛性

**定理 1** 设  $\{f_n\}$  是定义在  $A$  上的一列可测函数, 则下列函数都是  $A$  上的可测函数:

(1) 上确界函数  $\sup_{n \geq 1} f_n(\omega)$ ;

(2) 下确界函数  $\inf_{n \geq 1} f_n(\omega)$ ;

(3) 上限函数  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ ;

(4) 下限函数  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ .

证 (1) 易知,  $\sup_{n \geq 1} f_n \leq a$  的充要条件是, 对于所有的  $n$ ,  $f_n \leq a$ , 故

$$A(\sup_{n \geq 1} f_n \leq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(f_n \leq a)$$

所以  $\sup_{n \geq 1} f_n$  是可测函数.

(2) 易知  $\inf_{n \geq 1} f_n < a$  的充要条件是, 存在  $n$ , 使  $f_n < a$ , 故

$$A(\inf_{n \geq 1} f_n < a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f_n < a)$$

所以  $\inf_{n \geq 1} f_n$  是可测函数.

(3) 令

$$g_n = \sup_{k \geq n} f_k$$

由 (1) 知  $g_n$  可测, 但

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \inf_{n \geq 1} g_n$$

故由 (2) 知  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  可测.

同理可证 (4)

推论 设  $\{f_n\}$  是  $A$  上的一列可测函数, 如果对于一切  $\omega \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$  存在 (极限值可为  $\pm\infty$ ), 则极限函数  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$  是可测函数.

证 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)}$$

故由定理 1 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$  是可测的.

引理 1 设  $f(\omega)$  是  $A$  上的非负可测函数, 则存在  $A$  上的非负简单函数的增序列  $\{f_n\}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad (3.1)$$

在  $A$  中处处成立.

证 令

$$f_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{当 } \frac{i-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{i}{2^n} \\ n, & \text{当 } f(\omega) \geq n \quad (i=1, 2, \dots, 2^n n) \end{cases}$$

显然, 当  $f(\omega) < \frac{2^n \cdot n}{2^n} = n$  时, 有

$$0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) < \frac{1}{2^n} \quad (3.2)$$

下面证明:

1°.  $\{f_n(\omega)\}$  单调增加.

设  $0 \leq f(\omega) < n$ , 则存在正整数  $i$ , 使

$$\frac{i-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{i}{2^n} \quad (i=1, 2, \dots, 2^n n)$$

即

$$\frac{2i-2}{2^{n+1}} \leq f(\omega) < \frac{2i}{2^{n+1}}$$

亦即



$$\frac{2i-2}{2^{n+1}} \leq f(\omega) < \frac{2i-1}{2^{n+1}} \text{ 或 } \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq f(\omega) < \frac{2i}{2^{n+1}}$$

故

$$f_n(\omega) = \frac{i-1}{2^n}$$

$$f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} \frac{2i-2}{2^{n+1}}, & \text{当 } \frac{2i-2}{2^{n+1}} \leq f(\omega) < \frac{2i-1}{2^{n+1}} \\ \frac{2i-1}{2^{n+1}}, & \text{当 } \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq f(\omega) < \frac{2i}{2^{n+1}} \end{cases}$$

所以  $f_{n+1}(\omega) \geq f_n(\omega)$ .

再设  $f(\omega) \geq n$ , 分两种情况讨论:

如果  $n \leq f(\omega) < n+1$ , 即

$$\frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}} \leq f(\omega) < \frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

则

$$f_{n+1}(\omega) \geq \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = f_n(\omega)$$

如果  $f(\omega) \geq n+1$ , 则

$$f_n(\omega) = n < n+1 = f_{n+1}(\omega)$$

于是对一切  $\omega \in A$ ,  $f_{n+1}(\omega) \geq f_n(\omega)$ , 即  $\{f_n(\omega)\}$  单调增加.

2°. (3.1) 式成立, 分两种情况讨论.

如果  $0 \leq f(\omega) < +\infty$ , 则存在正整数  $N(\omega)$ , 使  $f(\omega) < N$ , 于是当  $n \geq N$  时,  $f(\omega) < n$ , 故由 (3.2) 有

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{2^n} \quad (n \geq N)$$

所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

如果  $f(\omega) = +\infty$ , 则对于任何  $n$ ,  $f_n(\omega) = n$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = +\infty = f(\omega)$$

定义1 设  $f(\omega)$  是广义实值函数, 令

$$f^+(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } f(\omega) \geq 0 \\ 0, & \text{当 } f(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(\omega) = \begin{cases} -f(\omega), & \text{当 } f(\omega) < 0 \\ 0, & \text{当 } f(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

函数  $f^+$  与  $f^-$  分别称为  $f$  的正部和负部, 显然有

$$1^\circ. f(\omega) = f^+(\omega) - f^-(\omega);$$

$$|f(\omega)| = f^+(\omega) + f^-(\omega).$$

2°. 可测函数的正部负部都是可测的; 反之, 如果一个函数的正部和负部都是可测的, 则这个函数本身也是可测的.

定理2 广义实值函数  $f$  为可测的充分必要条件是它可以表示为一个简单函数列的极限.

证 充分部分可由定理1的推论推出, 下证必要性:

设  $f$  是可测函数, 将它分解为正部与负部:

$$f = f^+ - f^-$$

由引理1知, 存在非负的简单函数增序列  $\{f_n\}$  与  $\{g_n\}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f^-$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - g_n) = f \quad (3.3)$$

易知, 两个简单函数之差仍为简单函数, 故 (3.3) 式将  $f$  表示简单函数的极限.

定义2 设  $f_1, f_2, \dots$ , 和  $f$  是可测集  $A$  上的广义实值函数, 如果  $A$  中使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad (\text{极限值可以为 } \pm \infty)$$

不成立的点的集为一零集, 则称  $\{f_n\}$  在  $A$  上几乎处处收敛于  $f$ , 记为  $f_n \xrightarrow{a.e.} f [P]$ , 或  $f_n \rightarrow f \text{ a.e. } [P]$ , 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ a.e. } [P]$ .

起混淆的情况下（例如在整个讨论过程中，只出现一个测度），式中表示测度的字母（此处为  $P$ ）可以省去

例 1 设  $(R, \mathcal{L}, m)$  为所考虑的测度空间，令

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{如果 } x \text{ 为有理数} \\ \frac{1}{n}, & \text{如果 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

则  $f_n(x) \xrightarrow{a.e.} 0$ 。

例 2 设  $(R, \mathcal{L}, m)$  为所考虑的测度空间， $f(x)$  是  $R$  上的单调函数，令

$$A = \{x | x \in R, f'(x) \text{ 存在且有限}\}$$

由实变函数论知  $m(A') = 0$ 。令

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{当 } x \in A \\ \text{任意}, & \text{当 } x \in A' \end{cases}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)] = \varphi(x) \text{ a.e. } [m]$$

定理 3 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是完全测度空间， $A \in \mathcal{F}$ ， $\{f_n\}$  是  $A$  上定义的一列可测函数， $f$  是  $A$  上的广义实值函数，如果在  $A$  上  $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ ，则  $f$  是可测函数。

证 记

$$A_1 = A(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f)$$

由于  $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ ，故  $A - A_1 = A_0$  是零集，而  $\{f_n\}$  是  $A_1$  上的可测函数列，且当  $\omega \in A_1$  时，

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

由定理 1 的推论知， $f$  是  $A_1$  上可测函数，由于  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是完全测度空间，故  $f$  在  $A_0$  上可测，因此  $f$  在  $A = A_1 \cup A_0$  上可测。

**定理 4** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是完全测度空间,  $A \subset \Omega$ ,  $f, g, f_n (n=1, 2, \dots)$  都是  $A$  上的广义实值函数.

(1) 如果  $f_n \xrightarrow{p} f$  且  $f_n \xrightarrow{p} g$ , 则  $f \doteq g$ ;

(2) 如果  $f_n \xrightarrow{p} f$  且  $f \doteq g$ , 则  $f_n \xrightarrow{p} g$ .

证 (1) 设

$$N_1 = \{\omega \mid f_n \text{ 不收敛于 } f\}$$

$$N_2 = \{\omega \mid f_n \text{ 不收敛于 } g\}$$

$$N = \{\omega \mid f \neq g\}$$

则

$$N \subset N_1 \cup N_2$$

由于

$$P(N_1) = P(N_2) = 0$$

且  $P$  为完全测度, 故  $P(N) = 0$

(2) 采用 (1) 中的记号, 由假设有

$$P(N_1) = P(N) = 0$$

又

$$(A - N_1) \cap (A - N) \subset A - N_2$$

故

$$N_2 \subset N_1 \cup N$$

由于

$$P(N_1 \cup N) \leq P(N_1) + P(N) = 0$$

且  $P$  为完全测度, 故  $P(N_2) = 0$ .

**定理 5 (勒贝格)** 设  $A$  是具有有限测度的可测集,  $f$  和  $f_n (n=1, 2, \dots)$  是  $A$  上的几乎处处有限的可测函数, 如果在  $A$  上  $\{f_n\}$  几乎处处收敛于  $f$ , 则对于任何正数  $\varepsilon$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0 \quad (3.4)$$

证 设

$$A_0 = A(|f| = +\infty)$$

$$A_n = A(|f_n| = +\infty), n = 1, 2, \dots$$

$$B = A(f_n \text{ 不收敛于 } f)$$

$$Q = \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \cup B$$

则由假设有

$$P(Q) = 0 \tag{3.5}$$

设

$$B_k(\varepsilon) = A(|f_k - f| \geq \varepsilon)$$

$$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k(\varepsilon)$$

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)$$

因为  $\{R_n(\varepsilon)\}$  单调减少, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(R_n(\varepsilon)) = P(M) \tag{3.6}$$

现在要证明

$$M \subset Q \tag{3.7}$$

事实上, 如果  $\omega \notin Q$ , 则  $f_1(\omega), f_2(\omega), \dots$  和  $f(\omega)$  都是有限数, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\omega) = f(\omega)$$

故存在  $n$ , 使当  $k \geq n$  时,

$$|f_k(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$$

即  $\omega \notin B_k(\varepsilon) (k \geq n)$ , 因此,  $\omega \notin R_n(\varepsilon)$ , 从而  $\omega \notin M$ , 这就证明了 (3.7)。于是由 (3.5) 有  $P(M) = 0$ , 再由 (3.6) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(R_n(\varepsilon)) = 0 \tag{3.8}$$

因为  $B_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$ , 故由 (3.8) 即得 (3.4)。

定理 5 启示我们引进下面的定义:

**定义 3** 设  $f$  和  $f_n (n=1, 2, \dots)$  是  $A$  上的几乎处处有限的可测函数。如果对于任何正数  $\varepsilon$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$$

就称  $\{f_n\}$  依测度  $P$  收敛于  $f$ , 或称  $\{f_n\}$  (关于测度  $P$ ) 度量收敛于  $f$ , 记为

$$f_n \xrightarrow{P} f$$

如果不致引起混淆, 箭头下的  $P$  也可省去。

如果  $P$  是概率测度, 则依测度收敛也称为依概率收敛, 概率论中的弱大数定律所考虑的收敛就是这种收敛。

度量收敛的意义用文字来叙述就是: 如果事先给了一个表示偏差的正数  $\varepsilon$ , 不论这个  $\varepsilon$  多小, 使得  $|f_n(\omega) - f(\omega)|$  大于或等于  $\varepsilon$  的点  $\omega$  虽然可能很多, 但这种点  $\omega$  的全体的测度随着  $n$  无限增大而趋向于零。

利用度量收敛的概念, 勒贝格定理可以写成如下的形式。

**定理 5** 设  $A$  是具有有限测度的可测集,  $f$  和  $f_n (n=1, 2, \dots)$  是  $A$  上几乎处处有限的可测函数, 如果在  $A$  上  $\{f_n\}$  几乎处处收敛于  $f$ , 则  $\{f_n\}$  也度量收敛于  $f$

概率论中的强大数定律所考虑的收敛性是关于概率测度的几乎处处收敛, 于是由勒贝格定理可知, 这种收敛性蕴含弱大数定律中的按概率收敛。

下面的例子表明勒贝格定理之逆不成立。另外, 这个定理中  $A$  具有有限测度的条件是不可省略的。

**例 3** 对于每个自然数  $k$ , 将  $A = [0, 1]$  等分成  $k$  个区间, 依次记为

$$\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{kk}$$

将这些区间的特征函数排成一列:

$$\varphi_1 = \chi_{11}, \varphi_2 = \chi_{21}, \varphi_3 = \chi_{22}, \varphi_4 = \chi_{31}, \dots$$



则函数列  $\varphi_n$  度量收敛于 0, 因为如果  $\varphi_n = \chi_{k_i}$ , 则对于任意不大于 1 的正数  $\varepsilon$

$$A(|\varphi_n| \geq \varepsilon) = \Delta_{k_i}$$

但此集的测度等于  $\frac{1}{k}$  (取  $P$  为勒贝格测度), 当  $n \rightarrow \infty$  时它趋向于 0 (如果  $\varepsilon > 1$ , 则  $A(|\varphi_n| \geq \varepsilon)$  为空集)。

但对于  $(0, 1]$  中任一点  $x_0$ , 关系式

$$\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$$

并不成立。因为对于任意固定的  $k$ , 必有  $i$ , 使得  $x_0 \in \Delta_{k_i}$ , 从而  $\chi_{k_i}(x_0) = 1$ , 因此在数列

$$\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \varphi_3(x_0), \dots$$

中有无穷多项等于 1, 所以  $\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$  不能成立。

例 4 取  $A = (0, +\infty)$ ,  $P$  为勒贝格测度, 作函数。

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, n] \\ 0, & x \in (n, +\infty) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

显然,  $\{f_n\}$  在  $A$  上处处收敛于 1, 但当  $0 < \varepsilon < 1$  时,

$$A(|f_n - 1| \geq \varepsilon) = (n, +\infty)$$

然而  $P(n, +\infty) = +\infty$ , 所以  $\{f_n\}$  不依测度收敛于 1。

定理 5 表明, 在具有有限测度的可测集上, 度量收敛的概念是几乎处处收敛的概念的拓广, 但这两种收敛还有以下的联系。

定理 6 (黎斯(Riesz)) 如果  $\{f_n\}$  在  $A$  上度量收敛于  $f$ , 则必有子列  $\{f_{n_k}\}$  在  $A$  上几乎处处收敛于  $f$ 。

证 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A(|f_n - f| \geq 1)) = 0$$

故可取正整数  $n_1$ , 使

$$P(A(|f_{n_1} - f| \geq 1)) < \frac{1}{2}$$

一般地说, 可取正整数  $n_k (k > 1)$ , 使它满足

$$P(A(|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k})) < \frac{1}{2^k}, n_k > n_{k-1}$$

下面我们要证明  $\{f_{n_k}\}$  就是定理中所要求的子列，即关系式

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\omega) = f(\omega) \quad (3.9)$$

在  $A$  中几乎处处成立。其证如下：

设

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} A(|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k})$$

$$Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$$

则

$$P(R_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

由于  $\{R_i\}$  单调减少，故有

$$P(Q) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(R_i) = 0$$

今证 (3.9) 式对  $\omega \in A - Q$  成立。因为设  $\omega_0 \in A - Q$ ，则存在  $i_0$ ，使  $\omega_0 \notin R_{i_0}$ ，故当  $k \geq i_0$  时，

$$\omega_0 \notin A(|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k})$$

因此

$$|f_{n_k}(\omega_0) - f(\omega_0)| < \frac{1}{k} \quad (k \geq i_0)$$

因为  $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ ，故 (3.9) 式成立。

度量收敛还有如下一些性质：

定理 7 (1) 如果  $\{f_n\}$  在  $A$  上度量收敛于  $f$ ，则  $\{f_n\}$  在  $A$  上也度量收敛于对等于  $f$  的任一可测函数  $g$ ，

(2) 如果  $\{f_n\}$  在  $A$  上度量收敛于两个函数  $f$  与  $g$ ，则  $f$  对等于  $g$ 。

证 (1) 对于任何正数  $\varepsilon$ ，显然有

$$A(|f_n - g| \geq \varepsilon) \subset A(f \neq g) \cup A(|f_n - f| \geq \varepsilon)$$

因为  $P(A(f \neq g)) = 0$ , 故由上式有

$$P(A(|f_n - g| \geq \varepsilon)) \leq P(A(|f_n - f| \geq \varepsilon))$$

从而由  $f_n \Rightarrow f$  可推出  $f_n \Rightarrow g$ .

(2) 对于任何正数  $\varepsilon$ , 显然有

$$A(|f - g| < \varepsilon) \supset A\left(|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A\left(|f_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\text{故 } A(|f - g| \geq \varepsilon) \subset A\left(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup A\left(|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.10)$$

由于  $f_n \Rightarrow f$ ,  $f_n \Rightarrow g$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时

$$P(A(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2})) \rightarrow 0$$

$$P(A(|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2})) \rightarrow 0$$

于是由 (3.10) 有

$$P(A(|f - g| \geq \varepsilon)) = 0$$

因而, 从

$$A(f \neq g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(|f - g| \geq \frac{1}{n})$$

即得  $f$  与  $g$  对等.

**定理 8** 如果在  $\Lambda$  上  $\{f_n\}$  度量收敛于  $f$ ,  $\{g_n\}$  度量收敛于  $g$ ,  $\alpha, \beta$  是实常数, 则  $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$  度量收敛于  $\alpha f + \beta g$ .

**证** 不妨设  $\alpha, \beta \neq 0$ . 对于任何正数  $\varepsilon$ , 显然有

$$A(|\alpha f_n + \beta g_n - \alpha f - \beta g| < \varepsilon)$$

$$\supset A\left(|\alpha f_n - \alpha f| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A\left(|\beta g_n - \beta g| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

故

$$A(|\alpha f_n + \beta g_n - \alpha f - \beta g| \geq \varepsilon)$$

$$\subset A\left(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right) \cup A\left(|g_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right)$$

从而由  $f_n \Rightarrow f$  与  $g_n \Rightarrow g$  可推出

$$\alpha f_n + \beta g_n \Rightarrow \alpha f + \beta g$$

**定义 4** 设  $\{f_n\}$  是  $A$  上的一列几乎处处有限的可测函数,  $f$  是  $A$  上的实值可测函数. 如果对于每个  $\delta > 0$ , 存在一个可测集  $A_\delta \subset A$ , 使  $P(A_\delta) < \delta$  并使得  $\{f_n\}$  在  $A - A_\delta$  上一致收敛到  $f$ , 则称  $\{f_n\}$  在  $A$  上几乎一致收敛于  $f$ .

**定理 9** (叶果洛夫 (Егоров)) 设  $A$  是具有有限测度的可测集,  $\{f_n\}$  是  $A$  上的一列几乎处处有限的可测函数列, 如果  $\{f_n\}$  在  $A$  上几乎处处收敛于实值可测函数  $f$ , 则  $\{f_n\}$  在  $A$  上几乎一致收敛于  $f$ .

**证** 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 设

$$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} A(|f_k - f| \geq \varepsilon)$$

在证明勒贝格定理时已证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(R_n(\varepsilon)) = 0 \quad (3.11)$$

由此知, 对于每个正整数  $i$ , 存在正整数  $n_i$ , 使

$$P\left(R_{n_i}\left(\frac{1}{i}\right)\right) < \frac{1}{2^i}$$

对于任给的正数  $\delta$ , 选取充分大的正整数  $i_0$ , 使

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \delta$$

记

$$A_\delta = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} R_{n_i}\left(\frac{1}{i}\right)$$

则  $P(A_\delta) < \delta$

下面证明在  $A - A_\delta$  上  $\{f_n\}$  一致收敛于  $f$ .

对于任给的正数  $\varepsilon$ , 取正整数  $i$  充分大, 使满足

$$i \geq i_0, \quad \frac{1}{i} < \varepsilon$$

于是当  $\omega \in A - A_s$  时,  $\omega \notin R_{n_i}(\frac{1}{i})$ , 即当  $k \geq n_i$  时

$$\omega \notin A\left(|f_k - f| \geq \frac{1}{i}\right)$$

从而

$$|f_k(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{i} < \varepsilon (k \geq n_i, \omega \in A - A_s) \text{ 其中 } n_i$$

只与  $\varepsilon$  有关而与  $\omega$  无关, 所以  $\{f_n\}$  在  $A - A_s$  上一致收敛于  $f(\omega)$ .

**定理10** 设  $\{f_n\}$  是  $A$  上的几乎处处有限的可测函数列, 如果  $\{f_n\}$  几乎一致收敛于实值可测函数  $f$ , 则  $\{f_n\}$  几乎处处收敛于  $f$ .

**证** 由假设, 存在可测集  $E_n \subset A$ , 使得  $P(E_n) < \frac{1}{n}$  并使得  $\{f_n\}$  在  $A - E_n$  上一致收敛于  $f (n = 1, 2, \dots)$ , 令

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

则有

$$P(E) \leq P(E_n) < \frac{1}{n}$$

故有  $P(E) = 0$ , 在  $A - E$  上  $\{f_n\}$  显然收敛于  $f$ .

### 习 题 3.3

1. 下列各式是否成立:

$$(1) A(\sup_{n \geq 1} f_n < a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(f_n < a),$$

$$(2) A(\inf_{n \geq 1} f_n \leq a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f_n \leq a).$$

2. 在定理3中去掉测度  $P$  完全的假定, 定理的结论是否成立?

3. 证明度量收敛的可测函数列的每一个子列也度量收敛.

4. 设  $A$  具有有限测度, 在  $A$  上  $f_n \Rightarrow f$ ,  $g_n \Rightarrow g$ , 证明  $f_n \cdot g_n \Rightarrow f \cdot g$ .

5. 如果  $P(A) = +\infty$ , 上题的结论是否成立?

6. 设  $\{f_n\}$  在  $A$  上度量收敛于  $f$ ,  $\alpha$  是任意正实数, 证明

$$(1) |f_n|^\alpha \Rightarrow |f|^\alpha,$$

(2) 如果  $g$  是  $A$  上的任一可测函数, 则

$$|f_n - g|^a \Rightarrow |f - g|^a$$

7. 设  $f$  和  $f_n (n=1, 2, \dots)$  是  $A$  上的可测函数, 证明在  $A$  上  $f_n \Rightarrow f$  的充要条件是: 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在自然数  $N$ , 使得当  $n > N$  时有

$$P(A(|f_n - f| \geq \varepsilon)) < \varepsilon$$

8. 设  $\xi_n(\omega)$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = 0 \quad a.e.$$

的充要条件是对于任给  $\varepsilon > 0$  和  $\eta > 0$ , 存在正整数  $N$  使得

$$P(\{\omega \mid |\xi_n(\omega)| < \varepsilon, \text{对一切 } n > N\}) > 1 - \eta$$

9. 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $A, A_k \in \mathcal{F} (k=1, 2, \dots)$  且

$$A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

$f$  是定义在  $A$  上的函数, 它在  $A_k$  上取常值  $a_k$ , 这种函数称为  $A$  上的初等函数.

证明  $A$  上的每一个实值可测函数可以表为一个一致收敛的初等函数的极限.

10. 对于广义实值函数, 上题的结论是否成立?

11. 设  $f, f_n (n=1, 2, \dots)$  是集  $\Omega$  上的实值函数, 证明

$$(1) \{\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=0}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i}(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k}\};$$

$$(2) \{\omega \mid f_n(\omega) \text{ 不收敛于 } f(\omega)\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i}(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

12. 设  $f, f_n (n=1, 2, \dots)$  是集  $A$  上的几乎处处有限的可测函数, 则

(1)  $f_n \xrightarrow{a.e.} f$  的充要条件是, 对任给  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i}(\omega) - f(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

(2) 如果  $A$  具有有穷测度, 则  $f_n \xrightarrow{a.e.} f$  的充要条件是, 对任给的



$\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

13. 试给出几乎处处一致收敛的定义, 并与几乎一致收敛的概念相比较.

14. 如果存在正常数  $c$ , 使得  $\{\omega \mid |f(\omega)| > c\}$  是一个测度为零的集, 则称  $f$  是本性有界的. 用  $\|f\|$  表示满足上述条件的数  $c$  的下确界. 证明  $\{f_n\}$  几乎处处一致收敛于  $f$  的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

15. 设  $A$  是具有有限测度的可测集,  $f_1, f_2, \dots$  与  $f$  是  $A$  上的几乎处处有限的可测函数, 则  $\{f_n\}$  在  $A$  上依测度收敛于  $f$  的充要条件是: 对于  $\{f_n\}$  的任一子叙列  $\{f_{n_k}\}$  都可以从中再找到一个子叙列几乎处处收敛于  $f$ .

16. 设  $\{f_n\}$  是  $A$  上的一列可测函数, 如果对于任何  $\varepsilon > 0, \delta > 0$ , 存在只依赖于  $\varepsilon$  和  $\delta$  的正整数  $N$ , 使得当  $n, m \geq N$  时,

$$P(A(|f_n - f_m| > \varepsilon)) < \delta$$

则称  $\{f_n\}$  是依测度基本叙列.

证明如果  $\{f_n\}$  是可测集  $A$  上的依测度基本叙列, 且有子叙列  $\{f_{n_k}\}$  依测度收敛于  $f$ , 则  $f_n \Rightarrow f$ .

17. 设  $\{f_n\}$  是可测集  $A$  上的一列可测函数, 则它是依测度基本叙列的充要条件是: 存在某个可测函数  $f$ , 使得  $\{f_n\}$  依测度收敛于  $f$ .

## 第四章 积分理论

### § 4.1 测度有限的集上有界函数的积分

在本章中我们始终假定在一个给定的测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中进行讨论。

**定义 1** 设 $A$ 是一个具有有限测度的集,  $f$ 是定义在 $A$ 上的可测函数, 且对一切 $\omega \in A$ 有

$$c < f(\omega) < d \quad (1.1)$$

在区间 $[c, d]$ 中任意插入若干个分点

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \quad (1.2)$$

来划分区间 $[c, d]$ , 记这一分法为 $\Delta$ , 设

$$A_k = A(y_{k-1} \leq f < y_k)$$

则分别称

$$\overline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n y_k P(A_k)$$

$$\underline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n y_{k-1} P(A_k)$$

为 $f$ 相应于分法 $\Delta$ 的大和与小和。

显然集 $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )两两不相交, 且

$$A = \sum_{k=1}^n A_k \quad (1.3)$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (1.4)$$

**引理 1** 若在原来的分点中加入新的分点, 则大和不增

加，小和不减少，也就是说，如果加入新分点后对应的大和及小和分别为  $\overline{S}(\Delta')$  与  $\underline{S}(\Delta')$ ，则

$$\overline{S}(\Delta') \leq \overline{S}(\Delta), \quad \underline{S}(\Delta') \geq \underline{S}(\Delta)$$

证 不失一般性，我们只就在  $[y_{i-1}, y_i]$  中加入一个分点  $y'$  而构成新分法  $\Delta'$  的情况来证明。此时当  $k \neq i$  时，对新分法而言， $[y_{k-1}, y_k]$  与  $A_k$  无变动，但  $[y_{i-1}, y_i]$  却分成

$$[y_{i-1}, y'] \text{ 与 } [y', y_i]$$

两部分，因而  $A_i$  分成两个集的和：

$$A_i = A'_i + A''_i$$

其中

$$A'_i = A(y_{i-1} \leq f < y'), \quad A''_i = A(y' \leq f < y_i)$$

$$P(A_i) = P(A'_i) + P(A''_i) \quad (1.5)$$

于是有

$$\overline{S}(\Delta) - \overline{S}(\Delta') = y_i P(A_i) - y' P(A_i) - y_i P(A''_i) \quad (1.6)$$

由于  $y' < y_i$ ，故由 (1.5) 与 (1.6) 有

$$\overline{S}(\Delta) - \overline{S}(\Delta') \geq 0, \quad \text{即 } \overline{S}(\Delta) \geq \overline{S}(\Delta')$$

同理可证  $\underline{S}(\Delta') \geq \underline{S}(\Delta)$

推论 任一个小和不大于任一个大和。

证 设  $\Delta_1$  与  $\Delta_2$  是  $[c, d]$  的任意两个分法，将  $\Delta_1$  与  $\Delta_2$  中所有的分点合并起来，组成一个分法  $\Delta_3$ ，则

$$\underline{S}(\Delta_1) \leq \underline{S}(\Delta_3), \quad \overline{S}(\Delta_3) \leq \overline{S}(\Delta_2)$$

于是由  $\underline{S}(\Delta_3) \leq \overline{S}(\Delta_3)$  即得  $\underline{S}(\Delta_1) \leq \overline{S}(\Delta_2)$ 。

引理 2 设  $\overline{S}$  与  $\underline{S}$  分别表示所有大和的集合的下确界与所有小和的集合的上确界，即

$$\overline{S} = \inf_{\Delta} \overline{S}(\Delta), \quad \underline{S} = \sup_{\Delta} \underline{S}(\Delta)$$

则  $\overline{S}$  与  $\underline{S}$  都是有限数, 且二者相等.

证 设  $\Delta_0$  是一个分法, 则任一大和  $\overline{S}(\Delta)$  都满足

$$\underline{S}(\Delta_0) \leq \overline{S}(\Delta)$$

所以, 所有大和的全体  $\{\overline{S}(\Delta)\}$  是一个有下界的集, 故其下确界  $\overline{S}$  有限, 且

$$\underline{S}(\Delta_0) \leq \overline{S}$$

由于  $\Delta_0$  可以任取, 故上式也表示所有小和的全体  $\{\underline{S}(\Delta)\}$  是有上界的集, 故其上确界  $\underline{S}$  有限. 于是对于任一分法  $\Delta$  有

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}(\Delta)$$

令

$$\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$$

则由 (1.4) 有

$$\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) \leq \lambda(\Delta)P(\Delta)$$

从而有

$$0 \leq \overline{S} - \underline{S} \leq \lambda(\Delta)P(\Delta) \quad (1.7)$$

由于  $\lambda(\Delta)$  可任意小, 故得

$$\overline{S} = \underline{S}$$

**定义 2** 设  $\Delta$  是区间  $[c, d]$  的一个分法,  $\sigma(\Delta)$  是依赖于  $\Delta$  的一个量 (即  $\sigma(\Delta)$  是  $\Delta$  的函数), 如果存在常数  $S$ , 它满足如下条件: 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得对于任何分法  $\Delta$ , 当  $\lambda(\Delta) < \delta$  时, 有

$$|\sigma(\Delta) - S| < \varepsilon$$

则称当  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$  时,  $\sigma(\Delta)$  有极限  $S$ , 记为

$$\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(\Delta) = S$$

**引理 3** 当  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$  时, 大和  $\overline{S}(\Delta)$  与小和  $\underline{S}(\Delta)$  的极限都存在, 且二者相等 (用  $S$  表示共同的极限值), 即

$$\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \overline{S}(\Delta) = \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \underline{S}(\Delta) = S \quad (1.8)$$

证 取

$$S = \underline{S} = \overline{S}$$

则对于任一分法  $\Delta$  有

$$\underline{S}(\Delta) \leq S \leq \overline{S}(\Delta)$$

由上式及 (1.7) 有

$$0 \leq \overline{S}(\Delta) - S \leq \lambda(\Delta)P(A)$$

故有

$$\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} (\overline{S}(\Delta) - S) = 0$$

即

$$\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \overline{S}(\Delta) = S$$

同理可证

$$\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \underline{S}(\Delta) = S$$

**定义 3** 设  $f$  是定义在具有有限测度的集  $A$  上的有界可测函数, 则称 (1.8) 式中的极限为  $f$  在  $A$  上关于测度  $P$  的积分, 并用记号

$$\int_A f(\omega)P(d\omega) \text{ 或 } \int_A f dP \quad (1.9)$$

来表示.

由引理 3 易知, 积分 (1.9) 的值与其在定义中所用到的数  $c$  与  $d$  无关. 事实上, 设  $(c^*, d^*)$  是包含  $f$  的值域的另一区间, 即对一切  $\omega \in A$  有

$$c^* < f(\omega) < d^*$$

为确定起见, 不妨设

$$c < c^* < f(\omega) < d^* < d$$

在  $[c, d]$  中插入分点

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$$

来划分区间, 并设  $c^*$  与  $d^*$  都是分点之一, 即设

$$c^* = y_l, \quad d^* = y_n$$

于是当  $k > m$  或  $k \leq l$  时有

$$P(A_k) = 0$$

因此得到

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^n y_k P(A_k) = \sum_{k=l+1}^m y_k P(A_k) = \bar{S}^* \quad (1.10)$$

其中  $\bar{S}^*$  是由  $(c^*, d^*)$  产生的大和，将分点加密然后取其极限，则由上式可知由  $(c, d)$  与  $(c^*, d^*)$  得到的积分值  $S$  与  $S^*$  相等。这个事实是很重要的，因为只有这样才能使积分的定义摆脱了选取  $c, d$  时的偶然性。

从以上的讨论知，对于定义在具有有限测度的集  $A$  上的任何有界可测函数  $f$ ，积分 (1.9) 都有意义，且为一个有限数，这时我们也说  $f$  在  $A$  上可积。

**定理 1** 设  $P(A) < \infty$ ， $f$  是定义在  $A$  上的有界可测函数，且在  $A$  上满足

$$c \leq f(\omega) \leq d$$

$$\text{则} \quad cP(A) \leq \int_A f dP \leq dP(A) \quad (1.11)$$

**证** 任取正数  $\varepsilon$ ，则

$$c - \varepsilon < f(\omega) < d + \varepsilon$$

设  $\Delta$  是  $[c - \varepsilon, d + \varepsilon]$  的任一分法：

$$c - \varepsilon = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d + \varepsilon$$

则

$$c - \varepsilon < y_k \leq d + \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad (c - \varepsilon) \sum_{k=1}^n P(A_k) &< \sum_{k=1}^n y_k P(A_k) \\ &\leq (d + \varepsilon) \sum_{k=1}^n P(A_k) \end{aligned}$$

因此



$$(c - \varepsilon)P(A) < \overline{S}(\Delta) \leq (d + \varepsilon)P(A)$$

先令  $\lambda(\Delta) \rightarrow C$ , 再令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 就得到 (1.11) 式.

**推论 1** 设  $P(A) < \infty$ , 如果在  $A$  上取常数值  $c$ , 则

$$\int_A f dP = cP(A)$$

**推论 2** 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的有界可测函数, 如果  $f$  不是负的 (不是正的), 则它的积分也不是负数 (不是正数).

**推论 3** 如果  $P(A) = 0$ , 则任何有界可测函数在  $A$  上的积分等于 0.

**定理 2** 设  $P(A) < +\infty$ ,  $f$  是  $A$  上的有界可测函数, 如果  $A$  分解为有限个互不相交的可测集的和:

$$A = \sum_{k=1}^n A_k$$

则

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f dP \quad (1.12)$$

**证** 先就  $A$  分解为两个集的和

$$A = A' + A''$$

的情况来证明. 设在  $A$  上

$$c < f(\omega) < d$$

又设

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

是  $[c, d]$  的任一分法, 记为  $\Delta$ . 令

$$E_k = A(y_{k-1} \leq f < y_k)$$

$$E_k' = A'(y_{k-1} \leq f < y_k)$$

$$E_k'' = A''(y_{k-1} \leq f < y_k)$$

则

$$E_k = E_k' + E_k''$$

$$P(E_k) = P(E'_k) + P(E''_k)$$

于是

$$\sum_{k=1}^n y_k P(E_k) = \sum_{k=1}^n y_k P(E'_k) + \sum_{k=1}^n y_k P(E''_k)$$

令  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$  即得

$$\int_A f dP = \int_{A'} f dP + \int_{A''} f dP \quad (1.13)$$

用数学归纳法由 (1.13) 即可推出 (1.12)。

**定理 3** 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的有界可测函数。如果  $A$  分解为可列个互不相交的可测集的和:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad (1.14)$$

则

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dP \quad (1.15)$$

证 由 (1.14) 有

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (1.16)$$

令

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \quad (1.17)$$

则由 (1.16) 与 (1.17) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k) = 0 \quad (1.18)$$

由定理 2 有

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f dP + \int_{R_n} f dP \quad (1.19)$$

设在  $A$  上

$$c < f(\omega) < d$$

于是由定理 1 有

$$cP(R_n) \leq \int_{R_n} f dP \leq dP(R_n)$$

由上式及 (1.18) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_n} f dP = 0$$

于是在 (1.19) 中令  $n \rightarrow \infty$  即得 (1.15)。

(1.12) 式称为积分的有限可加性, (1.15) 式则称为积分的可列可加性。

在以下的各推论中, 设  $A$  是具有有限测度的可测集。

推论 1 设  $f$  与  $g$  是定义在  $A$  上的两个对等的有界可测函数, 则

$$\int_A f dP = \int_A g dP \quad (1.20)$$

证 令

$$A_1 = A(f \neq g), \quad A_2 = A(f = g)$$

则  $P(A_1) = 0$ , 因而

$$\int_{A_1} f dP = \int_{A_1} g dP = 0$$

在  $A_2$  上  $f = g$ , 故

$$\int_{A_2} f dP = \int_{A_2} g dP$$

将以上二式两边相加并利用积分的有限可加性即得 (1.20)。

推论 2 设  $f$  是  $A$  上的非负有界可测函数, 如果

$$\int_A f dP = 0$$

则  $f$  对等于 0。

证 由于

$$A(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f > \frac{1}{n})$$

如果  $f$  不对等于 0, 则存在正整数  $N$ , 使得

$$P(A(f > \frac{1}{N})) = \sigma > 0$$

令

$$A_1 = A(f > \frac{1}{N}), \quad A_2 = A - A_1$$

则  $\int_{A_1} f dP \geq \frac{\sigma}{N}, \int_{A_2} f dP \geq 0$

于是

$$\int_A f dP = \int_{A_1} f dP + \int_{A_2} f dP \geq \frac{\sigma}{N} > 0$$

这与假设矛盾。

引理 4 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  与  $g$  都是  $A$  上定义的有界可测函数, 则

$$\int_A (f+g) dP = \int_A f dP + \int_A g dP \quad (1.21)$$

证 设在  $A$  上

$$c < f(\omega) < d, c < g(\omega) < d$$

又设

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

是  $[c, d]$  的任一分法, 记为  $\Delta$ , 令

$$F_k = A(y_{k-1} \leq f < y_k) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$G_k = A(y_{k-1} \leq g < y_k)$$

$$T_{i,j} = F_i \cap G_j \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

显然

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{i,j}$$

$$\int_A (f+g) dP = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{T_{i,j}} (f+g) dP$$

当  $\omega \in T_{i,j}$  时, 有

$$y_{i-1} + y_{j-1} \leq f(\omega) + g(\omega) < y_i + y_j$$

由定理 1 得

$$(y_{i-1} + y_{j-1})P(T_{i,j}) \leq \int_{T_{i,j}} (f+g) dP \leq (y_i + y_j)P(T_{i,j})$$

将这些不等式各边分别相加, 得

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{i-1} + y_{j-1}) P(T_{i,j})$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_A (f+g) dP \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i + y_j) P(T_{ij}) \end{aligned} \quad (1.22)$$

但

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i P(T_{ij}) &= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n P(T_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i P\left(\sum_{j=1}^n T_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i P\left(\sum_{j=1}^n F_j \cap G_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i P(F_i) \\ &= \overline{S}_f(\Delta) \end{aligned}$$

此处  $\overline{S}_f(\Delta)$  表示  $f$  相应于分法  $\Delta$  的大和。

用同样的方法可以计算 (1.22) 中其它的和，于是 (1.22) 可以写为

$$\begin{aligned} \underline{S}_f(\Delta) + \underline{S}_g(\Delta) &\leq \int_A (f+g) dP \\ &\leq \overline{S}_f + \overline{S}_g(\Delta) \end{aligned} \quad (1.23)$$

其中的记号是不讲自明的。

在 (1.23) 中令  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$ ，即得 (1.21)。

引理 5 设  $P(A) < \infty$ ， $f$  是定义在  $A$  上的有界可测函数， $c$  是一个有限常数，则

$$\int_A cf dP = c \int_A f dP \quad (1.24)$$

证 当  $c=0$  时 (1.24) 显然成立。

今设  $c>0$ ， $a < f(\omega) < b$ 。又设

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

是  $[a, b]$  的任一分法，记为  $\Delta$ 。按定义 1 引进  $\overline{A}_i$ ， $\overline{S}(\Delta)$  和  $\underline{S}(\Delta)$ ，则

$$\int_A cf dP = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} cf dP$$

但当  $\omega \in A_k$  时, 有

$$cy_{k-1} \leq cf(\omega) < cy_k$$

于是由定理 1 有

$$cy_{k-1}P(A_k) \leq \int_{A_k} cf dP < cy_kP(A_k)$$

将这些不等式各边分别相加, 得

$$c \underline{S}(\Delta) \leq \int_A cf dP < c \overline{S}(\Delta)$$

在上式中令  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$ , 即得 (1.24)。

$c < 0$  的情况可以类似地证明。

**定理 4** 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$ 、 $g$  是  $A$  上的有界可测函数,  $\alpha$ 、 $\beta$  是两个有限常数, 则

$$\int_A (\alpha f + \beta g) dP = \alpha \int_A f dP + \beta \int_A g dP \quad (1.25)$$

等式 (1.25) 称为积分的线性性。

本定理是引理 4 与 5 的直接推论。

**推论** 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$ 、 $g$  是  $A$  上的有界可测函数, 则

$$\int_A (f - g) dP = \int_A f dP - \int_A g dP$$

**定理 5** (积分的单调性) 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$ 、 $g$  是  $A$  上有界可测函数, 如果

$$f(\omega) \leq g(\omega) \quad (1.26)$$

在  $A$  上几乎处处成立, 则

$$\int_A f dP \leq \int_A g dP \quad (1.27)$$

**证** 根据定理 3 的推论 1, 只需就 (1.26) 在  $A$  上处处成立的情况来证明。此时

$$g(\omega) - f(\omega) \geq 0 \quad (\omega \in A)$$

于是有

$$\int_A g dP - \int_A f dP = \int_A (g - f) dP \geq 0$$

故 (1.27) 式成立。



推论 1 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的有界可测函数, 如果  $f(\omega) \geq 0$  在  $A$  上几乎处处成立, 则

$$\int_A f dP \geq 0$$

定理 6 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的有界可测函数, 则

$$\left| \int_A f dP \right| \leq \int_A |f| dP \quad (1.28)$$

证 由于

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

故根据积分的单调性即得

$$-\int_A |f| dP \leq \int_A f dP \leq \int_A |f| dP$$

由此即得 (1.28)。

### 习 题 4.1

1. 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的有界可测函数, 证明

$$\int_A f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \frac{k}{n} P\left(A \left( \frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n} \right)\right)$$

2. 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的有界可测函数, 则对于任何正数  $\varepsilon$ , 都存在  $A$  上的简单函数  $\varphi$ , 使

$$\int_A |f - \varphi| dP < \varepsilon$$

3. 设  $P(A) < \infty$ ,  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , 其中  $A_k$  为可测集. 如果  $A$  中

的每个点  $\omega$  至少居于上述几个集中的  $q$  个, 则  $A_k (k=1, 2, \dots, n)$  中至少有一个集具有测度  $\geq \frac{q}{n} P(A)$ .

4. 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是全有限的测度空间,  $f$  是  $\Omega$  上的非负有界可测函数,  $A \in \mathcal{F}$ , 令

$$m(A) = \int_A f dP, \quad m(\phi) = 0$$

证明  $m(A)$  是  $\mathcal{F}$  上的全有限测度.

5. 设  $0 < P(A) < \infty$ ,  $f$  与  $g$  是  $A$  上的可积函数, 由

$$f(\omega) < g(\omega)$$

在  $A$  上几乎处处成立能否推出

$$\int_A f dP < \int_A g dP$$

## § 4.2 测度 $\sigma$ -有限的集上 一般可测函数的积分

**引理 1** 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上定义的非负可测函数,  $N$  是任一正整数, 令

$$[f(\omega)]_N = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } f(\omega) \leq N \\ N, & \text{当 } f(\omega) > N \end{cases}$$

则  $[f]_N$  是一可测函数, 且极限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A [f]_N dP \quad (2.1)$$

存在 (有限或无限)。

**证** 由等式

$$A([f]_N \leq c) = \begin{cases} A(f \leq c), & \text{当 } c \leq N \\ A, & \text{当 } c > N \end{cases}$$

知  $[f]_N$  是可测的 (这里并未要求  $A$  的测度有限)。因为  $[f]_N$  是有界函数, 故积分  $\int_A [f]_N dP$  存在。此外显然有

$$[f(\omega)] \leq [f(\omega)]_1 \leq [f(\omega)]_2 \leq [f(\omega)]_3 \leq \dots$$

故

$$\int_A [f]_1 dP \leq \int_A [f]_2 dP \leq \int_A [f]_3 dP \leq \dots$$

所以极限 (2.1) 存在。

**定义 1** 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的非负可测函数, 则称 (2.1) 所表示的极限为  $f$  在  $A$  上的积分, 并记为

$$\int_A f dP$$

如果这个积分是一个有限数, 则称函数  $f$  在  $A$  上可积。

易知，对于测度有限的集上的非负有界可测函数而言，新的积分定义和老的积分定义是一致的，这是因为当  $N$  充分大时，有

$$[f]_N \equiv f$$

显然此处定义的积分具有可加性。事实上，设  $A = A_1 + A_2$ ，其中  $A_1, A_2$  是可测集，则

$$\begin{aligned} \int_A f dP &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_A [f]_N dP \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_{A_1} [f]_N dP + \int_{A_2} [f]_N dP \right\} \\ &= \int_{A_1} f dP + \int_{A_2} f dP \end{aligned}$$

**定义 2** 设  $A$  是一个可测集，如果

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

是  $A$  的一列可测子集，而且

$$P(A_n) < \infty, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

则称  $\{A_n\}$  是  $A$  的一列单调测度有限覆盖。

显然具有  $\sigma$ -有限测度的集一定存在单调测度有限覆盖。

事实上，如果  $A$  具有  $\sigma$ -有限测度，则按定义，存在可测集列  $\{E_n\}$  使

$$P(E_n) < \infty, \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

令

$$A_n = A \cap \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right)$$

则  $\{A_n\}$  就是  $A$  的一列单调测度有限覆盖。

**定义 3** 设  $A$  是一个具有  $\sigma$ -有限测度的集， $\{A_n\}$  是  $A$  的一列单调测度有限覆盖， $f$  是定义在  $A$  上的非负可测函数，则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dP \quad (2.2)$$

称为  $f$  在  $A$  上的积分, 并记为

$$\int_A f dP$$

如果这个积分是一个有限数, 则称函数  $f$  在  $A$  上可积.

注: 由于  $f$  非负而  $\{A_n\}$  单调增加, 故由积分的可加性知  $\int_{A_n} f dP$  是一个增序列, 因而极限 (2.2) 一定存在 (但可能为无限).

我们要说明这样定义的积分是确定的. 也就是说要证明极限 (2.2) 的值与单调测度有限覆盖列  $\{A_n\}$  的选取无关. 以下的两个引理就是证明这一事实.

引理 2 设  $A$  是一个具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是定义在  $A$  上的非负可测函数,  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP \quad (2.3)$$

证 由于

$$f \geq [f]_n$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dP \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP \quad (2.4)$$

设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dP = I$$

下面我们考虑  $I < \infty$  的情况, 此时任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使

$$\int_{A_N} f dP > I - \frac{\varepsilon}{2}$$

根据定义 1 由上式知, 存在正整数  $m$ , 使

$$\int_{A_m} [f]_m dP > I - \varepsilon$$

不妨设  $m \geq N$ , 于是有

$$\int_{A_m} [f]_m dP > I - \varepsilon$$

由于  $\varepsilon$  任意而  $\{\int_{A_n} [f]_n dP\}$  单调增加, 故由上式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP \geq I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dP \quad (2.5)$$

同理可证当  $I = \infty$  时, (2.5) 仍成立.

由 (2.4) 与 (2.5) 即得 (2.3).

**引理 3** 设  $A$  是一个具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是定义在  $A$  上的非负可测函数,  $\{A_n\}$  与  $\{B_n\}$  都是  $A$  的单调测度有限覆盖, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} [f]_n dP \quad (2.6)$$

**证** 如果这两个极限都为  $\infty$ , 则 (2.6) 自然成立. 下面考虑这两个极限中有一个为有限的情况, 不妨设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP = A < \infty \quad (2.7)$$

由于  $\{\int_{A_n} [f]_n dP\}$  是单调增加的数列, 故对一切正整数  $n$ , 有

$$\int_{A_n} [f]_n dP \leq A$$

根据有限测度集上的有界可测函数积分的可加性和单调性, 对于每个正整数  $m$ , 当  $n \geq m$  时, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_n} [f]_n dP &= \int_{B_n \cap A_n} [f]_n dP + \int_{B_n - A_n} [f]_n dP \\ &\leq \int_{A_n} [f]_n dP + mP(B_n - A_n) \\ &\leq A + mP(B_n - A_n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

由于对固定的  $m$ ,  $\{B_n - A_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是单调减少的集列, 且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n - A_n) = B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B_n - A = \phi$$

又  $P(B_n - A_1) \leq P(B_n) < \infty$ , 故根据测度的上连续性有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n - A_n) = 0$$

于是在 (2.8) 中令  $n \rightarrow \infty$ , 即得

$$\int_{B_n} [f]_n dP \leq A$$

令  $m \rightarrow \infty$  即得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_m} [f]_m dP \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP \quad (2.9)$$

由于  $\{A_n\}$  与  $\{B_n\}$  处于平等的地位, 故仿照上面的证明, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} [f]_n dP$$

的有限性又可推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_m} [f]_m dP \quad (2.10)$$

由 (2.9) 与 (2.10) 即得 (2.6)。

以上两个引理表明, 极限 (2.2) 的值与单调测度有限覆盖列  $\{A_n\}$  的选取无关。因而定义3是确定的。

易知, 对于测度有限的集上的非负可测函数而言, 新的积分定义与老的积分定义是一致的, 因为可取  $A_n = A (n = 1, 2, \dots)$  为  $A$  的单调测度有限覆盖。

**推论** 设  $f$  在  $A$  上可积,  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度覆盖, 则

$$\int_A f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [f]_n dP$$

**定义4** 设  $A$  是一个具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是定义在  $A$  上的可测函数, 如果  $f$  的正部  $f^+$  和负部  $f^-$  中至少有一个在  $A$  上可积, 则称

$$\int_A f^+ dP - \int_A f^- dP$$

为  $f$  在  $A$  上的积分 (有限或无限), 并记为

$$\int_A f dP$$

如果  $\int_A f dP$  有限, 则称  $f$  在  $A$  上可积。

显然  $f$  在  $A$  上可积的充要条件是  $f^+$  与  $f^-$  都在  $A$  上可积。

易知, 对于非负可测函数来说, 积分及可积性的新、旧定义是一致的。

在公理化的概率论中, 随机变量的数学期望就是用概率空



间上的积分来定义的, 即设  $\xi(\omega)$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量, 则称积分

$$\int \xi(\omega) dP$$

为  $\xi(\omega)$  的数学期望, 记为  $E\xi$

下面我们来介绍积分的一些重要性质.

**引理 4** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可积函数,  $g$  是  $A$  上的可测函数, 如果

$$|g| \leq f \tag{2.11}$$

则  $g$  也是可积的.

**证** 由 (2.11) 有

$$g^+ \leq f, \quad g^- \leq f$$

设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 对任何正整数  $n$ , 显然有

$$\int_{A_n} [g^+]_n dP \leq \int_{A_n} [f]_n dP \leq \int_A f dP$$

于是由引理 2 有

$$\int_A g^+ dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} [g^+]_n dP \leq \int_A f dP < \infty$$

因此  $g^+$  是可积的. 同理可证  $g^-$  也是可积的.

**引理 5** 设  $f, g$  是集  $A$  上的两个非负函数, 则对于任何正整数  $n$ , 有

$$[f+g]_n \leq [f]_n + [g]_n \leq [f+g]_{2n} \tag{2.12}$$

**证** 设  $\omega \in A$ , 如果

$$f(\omega) < n, \quad g(\omega) < n$$

则显然有

$$\begin{aligned} [f(\omega) + g(\omega)]_n &\leq f(\omega) + g(\omega) \\ &= [f(\omega)]_n + [g(\omega)]_n \end{aligned}$$

如果  $f(\omega)$  与  $g(\omega)$  中至少有一个不小于  $n$ , 例如  $f(\omega) \geq n$ , 则

$$\begin{aligned} [f(\omega) + g(\omega)]_n &= n \\ &\leq n + [g(\omega)]_n \end{aligned}$$

$$= [f(\omega)]_n + [g(\omega)]_n$$

故 (2.12) 左端不等式成立。

由于

$$[f]_n + [g]_n \leq f + g$$

$$[f]_n + [g]_n \leq 2n$$

故

$$[f]_n + [g]_n \leq \min(f + g, 2n) = [f + g]_{2n}$$

即 (2.12) 右端的不等式成立。

**引理 6** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  与  $g$  是  $A$  上的可积函数, 则  $f + g$  也是可积函数, 且

$$\int_A (f + g) dP = \int_A f dP + \int_A g dP \quad (2.13)$$

**证** 先考虑  $f \geq 0, g \geq 0$  的情况. 设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 根据引理 5 及测度有限的集上的有界函数的积分的性质有

$$\begin{aligned} \int_{A_n} [f + g]_n dP &\leq \int_{A_n} ([f]_n + [g]_n) dP \\ &= \int_{A_n} [f]_n dP + \int_{A_n} [g]_n dP \\ &\leq \int_{A_n} [f + g]_{2n} dP \\ &\leq \int_{A_{2n}} [f + g]_{2n} dP \end{aligned} \quad (2.14)$$

在 (2.14) 的第一个不等式中令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\int_A (f + g) dP \leq \int_A f dP + \int_A g dP \quad (2.15)$$

再在 (2.14) 的后两个不等式中令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\int_A f dP + \int_A g dP \leq \int_A (f + g) dP \quad (2.16)$$

由 (2.15) 及 (2.16) 即得 (2.13)。

利用数学归纳法可将 (2.13) 推广到有限个非负可积函数的情况。

下面考虑  $f, g$  是一般可积函数的情况。

由于

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+, \quad (f+g)^- \leq f^- + g^-$$

故由引理 4 知,  $f+g$  是可积的. 又由于

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

从而有

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^- \quad (2.17)$$

由于前面已证对非负可积函数 (2.13) 成立, 故由 (2.17) 有

$$\begin{aligned} & \int_A (f+g)^+ dP + \int_A f^- dP + \int_A g^- dP \\ &= \int_A f^+ dP + \int_A g^+ dP + \int_A (f+g)^- dP \end{aligned}$$

其中每一项都是有限数, 移项后即得 (2.13) .

**引理 7** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可积函数,  $c$  是一个有限常数, 则

$$\int_A c f dP = c \int_A f dP \quad (2.18)$$

**证** 先考虑  $f \geq 0, c > 0$  的情况. 如果  $c$  是任一正整数, 则 (2.18) 可由引理 6 推出. 如果  $c = \frac{1}{k}$  而  $k$  为正整数, 则由

引理 6 有

$$\int_A f dP = k \int_A \frac{1}{k} f dP$$

故

$$\int_A \frac{1}{k} f dP = \frac{1}{k} \int_A f dP$$

由此再应用引理 6 可知, 当  $c$  为有理数时, (2.18) 成立. 如果  $c$  是一正无理数, 则存在正有理数  $r, s$ , 使  $r < c < s$ , 由于  $f \geq 0$ , 故由引理 2, 根据有限测度集上的有界函数的积分单调性易证,

$$\int_A r f dP \leq \int_A c f dP \leq \int_A s f dP$$

由于  $c$  为有理数时, (2.18) 成立, 故上式可写为

$$r \int_A f dP \leq \int_A c f dP \leq s \int_A f dP$$

令  $r$  与  $s$  趋向  $c$  即得 (2.18) .

下面考虑  $f$  为一般可积函数的情况, 当  $c=0$  时, (2.18) 当然成立, 若  $c>0$ , 则由等式

$$(cf)^+ = cf^+, (cf)^- = cf^-$$

知, 此时 (2.18) 可归结为前面已证的非负可积函数的情况.

由

$$(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$$

有

$$\int_A (-f) dP = \int_A f^- dP - \int_A f^+ dP = - \int_A f dP$$

故当  $c=-1$  时, (2.18) 式成立.

若  $c$  是任意负数, 则

$$\int_A cf dP = - \int_A |c| f dP = - |c| \int_A f dP = c \int_A f dP$$

故 (2.18) 成立.

**定理 1** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f, g$  是  $A$  上的两个可积函数,  $\alpha, \beta$  是两个有限常数, 则  $\alpha f + \beta g$  也是可积函数, 且

$$\int_A (\alpha f + \beta g) dP = \alpha \int_A f dP + \beta \int_A g dP \quad (2.19)$$

等式 (2.19) 称为积分的线性性.

本定理是引理 6 与 7 的直接推论.

**定理 2** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可测函数, 则  $f$  在  $A$  上可积的充要条件是  $|f|$  在  $A$  上可积, 且当  $f$  可积时有

$$|\int_A f dP| \leq \int_A |f| dP \quad (2.20)$$

**证** 由于

$$|f| = f^+ + f^- \quad (2.21)$$

故由引理 4 知, 如果  $|f|$  可积, 则  $f^+, f^-$  都可积, 于是  $f$  可积.

反过来, 如果  $f$  可积, 则  $f^+$  与  $f^-$  都可积, 于是由 (2.21) 知,  $|f|$  也可积, 且

$$\int_A |f| dP = \int_A f^+ dP + \int_A f^- dP$$

又由定义, 有

$$\int_A f dP = \int_A f^+ dP - \int_A f^- dP$$

由以上二式即得 (2.20).

**定理 3** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集, 如果  $f$  在  $A$  上可积, 则  $f$  在  $A$  上几乎处处有限.

证 设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖. 根据定理 2. 不妨设  $f \geq 0$ . 令  $E = A(f = +\infty)$ , 则

$$[f(\omega)]_n = n, \quad \omega \in E$$

因此

$$\int_{A_n} [f]_n dP \geq \int_{E \cap A_n} [f]_n dP = n \cdot P(E \cap A_n) \quad (2.22)$$

由于  $\{E \cap A_n\}$  是  $E$  的单调测度有限覆盖. 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E \cap A_n) = P(E)$$

于是如果  $P(E) > 0$ , 则由 (2.22) 有

$$\int_A f dP \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A_n} [f]_n dP = \infty$$

这与  $f$  在  $A$  上可积矛盾, 故必须有  $P(E) = 0$ .

**定理 4** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集, 如果  $P(A) = 0$ , 则  $A$  上的一切可测函数  $f$  都在  $A$  上可积, 且

$$\int_A f dP = 0$$

证 根据定理 2, 不妨设  $f \geq 0$ , 于是由上节定理 1 的推论 3 及本节引理 2 即得本定理.

**定理 5** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集, 如果  $f$  在  $A$  上可积, 则  $f$  在  $A$  的任何可测子集上也可积.

证 设  $E$  是  $A$  的任意可测子集,  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖. 根据定理 2, 不妨设  $f \geq 0$ , 我们有

$$\int_{E \cap A_n} [f]_n dP \leq \int_{A_n} [f]_n dP$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$\int_E f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A_n} [f]_n dP \leq \int_A f dP < \infty$$

**定理 6** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f, g$  是  $A$  上的可测函数, 如果  $f \doteq g$ , 则由两积分  $\int_A f dP$  与  $\int_A g dP$  中一个存在可导出另一个存在, 且彼此相等.

**证** 设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 由假设有  $f^+ \doteq g^+$ , 由此有

$$[f^+(\omega)]_n \doteq [g^+(\omega)]_n$$

于是由上节定理 3 的推论 1 有

$$\int_{A_n} [f^+]_n dP = \int_{A_n} [g^+]_n dP$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$\int_A f^+ dP = \int_A g^+ dP$$

同理可证

$$\int_A f^- dP = \int_A g^- dP$$

由以上二式即得本定理.

**定理 7** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f, g$  是  $A$  上的可积函数, 如果  $f \geq g$ , 则

$$\int_A f dP \geq \int_A g dP \quad (2.23)$$

**证** 设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖. 由定理 6 知, 不妨设  $f \geq g$  处处成立, 于是有

$$f - g \geq 0$$

由此有

$$\int_{A_n} [f - g]_n dP \geq 0$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\int_A (f - g) dP \geq 0$$

根据定理 1, 由上式可得

$$\int_A f dP - \int_A g dP \geq 0$$

即 (2.23) 成立.



**定理 8** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可积函数,  $g$  是  $A$  上的可测函数, 如果  $|g| \leq f$ , 则  $g$  也在  $A$  上可积, 且

$$|\int_A g dP| \leq \int_A f dP$$

证 令

$$E = A(|g| > f)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } \omega \in A - E \\ |g(\omega)|, & \text{当 } \omega \in E \end{cases}$$

则对于一切  $\omega \in A$  有

$$|g(\omega)| \leq \tilde{f}(\omega)$$

由于  $P(E) = 0$ , 故  $\tilde{f} \doteq f$ , 从而由定理 6 知  $\tilde{f}$  在  $A$  上可积, 于是由引理 4、定理 7 及定理 2 即得所需结论.

**定理 9** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可测函数, 如果  $f \geq 0$  且  $\int_A f dP = 0$ , 则  $f \doteq 0$ .

证 令

$$E = A(f < 0)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } \omega \in A - E \\ 0, & \text{当 } \omega \in E \end{cases}$$

则对于一切  $\omega$  有  $\tilde{f} \geq 0$ , 由于  $P(E) = 0$ , 故  $\tilde{f} \doteq f$ , 于是由定理 6 知,  $\int_A \tilde{f} dP = 0$ . 设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 则有

$$0 \leq \int_{A_n} [\tilde{f}]_n dP \leq \int_A \tilde{f} dP = 0$$

故对一切  $n$  有

$$\int_{A_n} [\tilde{f}]_n dP = 0$$

于是由上节定理 3 的推论 2 知, 在  $A_n$  上  $[\tilde{f}]_n \doteq 0$ , 由此知在  $A_n$  上  $\tilde{f} \doteq 0$ , 因为  $A_n \uparrow A$ , 故在  $A$  上有  $\tilde{f} \doteq 0$ , 从而有  $f \doteq 0$ .

**定理 10** (积分的有限可加性) 设  $A$  具有  $\sigma$ -有限测度, 且是有限个两两不相交的可测集的和集:

$$A = \sum_{k=1}^n A_k$$

(1) 如果  $f$  是  $A$  上的非负可测函数, 则有

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f dP \quad (2.24)$$

(2) 如果  $f$  在每个  $A_k$  上可积, 则  $f$  在  $A$  上也可积, 且 (2.24) 成立.

证 下面就  $n=2$  的情形来证明, 一般情形可由归纳法完成.

(1) 设  $f \geq 0$ .  $\{B_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 则  $\{A_1 \cap B_n\}$  与  $\{A_2 \cap B_n\}$  分别为  $A_1$  与  $A_2$  的单调测度有限覆盖, 利用有限测度集上有界函数积分的可加性, 对于任何  $n$ , 有

$$\int_{B_n} [f]_n dP = \int_{A_1 \cap B_n} [f]_n dP + \int_{A_2 \cap B_n} [f]_n dP$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$\int_A f dP = \int_{A_1} f dP + \int_{A_2} f dP \quad (2.25)$$

(2) 设  $f$  是任意符号的可测函数, 则由 (2.25) 有

$$\int_A f^+ dP = \int_{A_1} f^+ dP + \int_{A_2} f^+ dP$$

$$\int_A f^- dP = \int_{A_1} f^- dP + \int_{A_2} f^- dP$$

由于  $f$  在  $A_1$  与  $A_2$  上可积, 故以上二等式两端都是有限数, 从第一式减去第二式即得所需结果.

**定理11 (绝对连续性)** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可积函数, 则对于任何  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 使当  $P(e) < \delta$  ( $e$  为  $A$  的任一可测子集) 时, 就有

$$|\int_e f dP| < \varepsilon \quad (2.26)$$

证 设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 由定理 2 知,  $|f|$  在  $A$  上可积, 于是存在正整数  $N$ , 使得

$$0 \leq \int_A |f| dP - \int_{A_N} [|f|]_N dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

由于

$$A_N \subset A, \quad [|f|]_N \leq |f|$$

故由上式有

$$0 \leq \int_A (|f| - [|f|]_N) dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

利用 (2.20) 式并注意  $[f]_N \leq N$ , 得

$$\begin{aligned} |\int_A f dP| &\leq \int_A |f| dP = \int_A (|f| - [|f|]_N) dP + \int_A [|f|]_N dP \\ &\leq \int_A (|A| - (|f|)_N) dP + N \cdot P(e) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot P(e) \end{aligned}$$

于是, 如取  $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ , 则当  $P(e) < \delta$  时, 由上式有

$$|\int_A f dP| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta = \varepsilon$$

**定理12 (积分的完全可加性)** 设  $A$  具有  $\sigma$ -有限测度, 且是可列个两两不相交的可测集的和集:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

(1) 如果  $f$  是  $A$  上的非负可测函数, 则有

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dP \quad (2.27)$$

(2) 如果  $f$  在  $A$  上可积, 则 (2.27) 成立.

**证** (1) 设  $f \geq 0$ , 则由积分的有限可加性有

$$\int_A f dP \geq \int \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} f dP = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f dP$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$\int_A f dP \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dP \quad (2.28)$$

设  $\{B_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖, 易知

$$\left\{ B_n \cap \left( \sum_{k=1}^n A_k \right) \right\}$$

也是  $A$  的单调测度有限覆盖, 根据积分的有限可加性有

$$\begin{aligned} \int_{B \cap (\sum_{k=1}^n A_k)} f dP &= \sum_{k=1}^n \int_{B \cap A_k} f dP \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f dP \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 便得到

$$\int_A f dP \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dP \quad (2.29)$$

由 (2.28) 与 (2.29) 即得 (2.27)

(2) 设  $f$  是  $A$  上任意符号的可测函数, 由于前面已证 (2.27) 对非负可测函数成立, 故有

$$\begin{aligned} \int_A f^+ dP &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ dP \\ \int_A f^- dP &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- dP \end{aligned}$$

由于  $f$  在  $A$  上可积, 故上述二等式的左方是有限的 (因此右方是收敛的正项级数). 作此二等式的差即得 (2.27).

**定理 13** 设  $A$  具有  $\sigma$ -有限测度, 且是可列个两两不相交的可测集的和集:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

如果  $f$  在每个  $A_k$  上可积, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| dP < +\infty \quad (2.30)$$

则  $f$  在每个  $A_k$  可积, 且 (2.27) 成立.

**证** 仿照 (2.29) 的证明可知

$$\int_A |f| dP \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| dP \quad (2.31)$$

由 (2.30) 与 (2.31) 即知  $|f|$  在  $A$  上可积, 从而  $f$  也在  $A$  上可积. 再由定理 12 即得 (2.27).

## 习 题 4.2

1. 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的非负可测函数, 下式是否成立:

$$\int_A f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P \left( A \left( \frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n} \right) \right)$$

2. 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的实值函数, 令

$$[f(\omega)]_n = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } |f(\omega)| \leq n \\ n, & \text{当 } f(\omega) > n \\ -n, & \text{当 } f(\omega) < -n \end{cases}$$

当  $f$  在  $A$  上可积时, 下式是否成立:

$$\int_A f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A [f]_n dP$$

3. 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是  $A$  上的非负实值可测函数, 令

$$f_n(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } f(\omega) \leq n \\ 0, & \text{当 } f(\omega) > n \end{cases}$$

下式是否成立:

$$\int_A f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP$$

4. 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖,  $f$  是  $A$  上的可测函数, 如果  $f$  在每个  $A_n$  上可积, 且极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f dP$$

存在且有限,  $f$  是否在  $A$  上可积?

5. 设  $P(A) < \infty$ ,  $f$  是定义在  $A$  上的非负实值可测函数,  $\varphi$  为任一满足条件  $0 \leq \varphi(\omega) \leq f(\omega)$  ( $\omega \in A$ ) 的简单函数, 则

$$\int_A f dP = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_A \varphi dP$$

6. 定理13中的条件 (2.30) 不能改为级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dP$$

收敛.

7. 设  $f$  在  $A$  上可积, 而  $\varphi$  是  $A$  上的有界可测函数, 则  $\varphi \cdot f$  在  $A$  上也可积.

8. 设  $P(A) < \infty$ , 证明  $A$  上的非负可测函数为可积的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(A(n \leq f < n+1)) < +\infty$$

9. 设  $A$  具有  $\sigma$ -有限测度,  $f$  在  $A$  上可积, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A(|f| \geq n)) = 0$$

10. 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是全  $\sigma$ -有限的测度空间,  $f$  是  $\Omega$  上的非负可测函数,  $A \in \mathcal{F}$ , 令

$$m(A) = \int_A f dP, \quad m(\phi) = 0$$

则  $m(A)$  是  $\mathcal{F}$  上的测度,  $m(A)$  是否全  $\sigma$ -有限?

11. 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f$  是  $A$  上的可测函数,  $g$  是  $A$  上的可积函数, 且

$$-\infty < a \leq f \leq b < +\infty$$

则存在常数  $c \in [a, b]$  使

$$\int_A f|g| dP = c \int_A |g| dP$$

### § 4.3 积分的极限定理

本节主要讨论积分和极限交换次序的问题, 这个问题在近代分析数学中具有重要意义.

**定理 1 (勒贝格)** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $\{f_n\}$  是在  $A$  上度量收敛于  $f$  的可测函数列. 如果存在  $A$  上的可积函数  $\Phi$ , 使得

$$|f_n| \leq \Phi \quad (n=1, 2, \dots) \tag{3.1}$$

则  $f$  在  $A$  上可积, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP = \int_A f dP \tag{3.2}$$



这个定理称为控制收敛定理， $\Phi$ 称为控制函数。

证 首先，根据 § 4.2 定理 8 知，条件 (3.1) 保证了每个  $f_n$  的可积性。由于  $f_n \Rightarrow f$ ，根据黎斯定理， $\{f_n\}$  有子列  $\{f_{n_k}\}$  在  $A$  上几乎处处收敛于  $f$ ，于是由

$$|f_{n_k}| \leq \Phi$$

可知

$$|f| \leq \Phi \quad (3.3)$$

故  $|f|$  在  $A$  上可积，从而  $f$  也可积，剩下的是证明 (3.2) 成立。

设  $\{A_n\}$  是  $A$  的单调测度有限覆盖，根据 (3.1) 及 § 4.2 定理 6，不妨设  $\Phi$  非负。由于  $\Phi$  可积，故对于任给的  $\varepsilon > 0$ ，存在正整数  $k$ ，使得

$$0 \leq \int_A \Phi dP - \int_{A_k} [\Phi]_k dP < \frac{\varepsilon}{5}$$

由此有

$$0 \leq \int_{A-A_k} \Phi dP < \frac{\varepsilon}{5} \quad (3.4)$$

又根据积分的绝对连续性，存在  $\delta > 0$ ，使当可测集  $e \subset A$  且  $P(e) < \delta$  时，有

$$\int_e \Phi dP < \frac{\varepsilon}{5} \quad (3.5)$$

由于  $f_n \Rightarrow f$ ，故对于上述  $A_k$  和  $\delta$ ，存在正整数  $N$ ，使得当  $n \geq N$  时，

$$P\left(A_k \left(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{5P(A_k)}\right)\right) < \delta \quad (3.6)$$

记

$$A_{k_n} = A_k \left(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{5P(A_k)}\right)$$

则当  $\omega \in A_k - A_{k_n}$  时，

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{\varepsilon}{5P(A_k)}$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_{A_k = A_{k_n}} |f_n - f| dP &\leq \frac{\varepsilon}{5P(A_k)} \cdot P(A_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\int_{A_{k_n}} \Phi dP < \frac{\varepsilon}{5} \quad (3.8)$$

由于

$$A = A_{k_n} + (A_k - A_{k_n}) + (A - A_k)$$

故由 (3.4) (3.7) 与 (3.8) 知, 当  $n \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_n dP - \int_A f dP \right| &\leq \int_A |f_n - f| dP \\ &= \int_{A - A_k} |f_n - f| dP + \int_{A_{k_n}} |f_n - f| dP \\ &\quad + \int_{A_k = A_{k_n}} |f_n - f| dP \\ &\leq 2 \int_{A - A_k} \Phi dP + 2 \int_{A_{k_n}} \Phi dP + \frac{\varepsilon}{5P(A_k)} \cdot P(A_k) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \end{aligned}$$

即 (3.2) 式成立.

**定理 2** 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $\{f_n\}$  是在  $A$  上几乎处处收敛于  $f$  的可测函数列. 如果存在  $A$  上的可积函数  $\Phi$ , 使得

$$|f_n| \leq \Phi \quad n = 1, 2, \dots$$

则  $f$  在  $A$  上可积, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP = \int_A f dP$$

这是几乎处处收敛条件下的控制收敛定理.

**证** 仿照定理 1 可证  $f$  的可积性. 我们注意到, 在证明 (3.2) 时所用到的实际上是固定集  $A_k$  上的依测度收敛. 由于

$A_k$  具有有限测度，故由  $\{f_n\}$  在  $A$  上的几乎处处收敛可推出  $\{f_n\}$  在  $A_k$  上依测度收敛，因而定理 1 中的证明在本定理的假设下也是适用的。

**推论** 设  $P(A) < \infty$ ， $\{f_n\}$  是在  $A$  上几乎处处（或按测度）收敛于可测函数  $f$  的可测函数列，如果存在常数  $k$ ，使得

$$|f_n| \leq k, n = 1, 2, \dots$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP = \int_A f dP$$

这个推论称为有界收敛定理。

**证** 取  $\Phi \equiv k$  作为定理 1 与 2 中的控制函数，由于  $P(A) < \infty$ ，故  $\Phi$  是可积的。于是由定理 1 与 2 可知，推论显然成立。

**引理 1** 设  $f_n$  与  $f$  是定义在集  $A$  上的非负函数，如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_0) = f(\omega_0)$$

则对于所有的正整数  $N$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(\omega_0)]_N = [f(\omega_0)]_N$$

**证** 如果  $f(\omega_0) > N$ ，则当  $n$  充分大时， $f_n(\omega_0) > N$ ，因而

$$[f_n(\omega_0)]_n = N = [f(\omega_0)]_N$$

如果  $f(\omega_0) < N$ ，则当  $n$  充分大时， $f_n(\omega_0) < N$ ，因而

$$[f_n(\omega_0)]_N = f_n(\omega_0) \rightarrow f(\omega_0) = [f(\omega_0)]_N$$

如果  $f(\omega_0) = N$ ，则对于任给的正数  $\varepsilon$ ，存在正整数  $n_0$ ，使得当  $n > n_0$  时，

$$f_n(\omega_0) > N - \varepsilon$$

因而

$$N - \varepsilon < [f_n(\omega_0)]_N \leq N$$

故

$$0 \leq [f(\omega_0)]_N - [f_n(\omega_0)]_N < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

定理 3 (勒维 (Levy)) 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f_n (n = 1, 2, \dots)$  是  $A$  上的非负可测函数列, 如果

$$f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq f_3(\omega) \leq \dots \quad (3.9)$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad (3.10)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP = \int_A f dP \quad (3.11)$$

证 由 (3.9) 知, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP = k$$

存在. 如果  $k = +\infty$ , 则由  $f \geq f_n$  知,  $\int_A f dP$  亦为  $+\infty$ , 故 (3.11) 成立.

下面考虑  $k < +\infty$  的情况. 对于任何正整数  $N$ , 显然有

$$0 \leq [f_n]_N \leq [f]_N, \quad n = 1, 2, \dots$$

又根据引理 1 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n]_N = [f]_N$$

由于  $0 \leq [f_n]_N \leq N$ ,  $P(A_N) < \infty$ , 故根据有界收敛定理有

$$\int_{A_N} [f]_N dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_N} [f_n]_N dP \leq k$$

再令  $N \rightarrow \infty$ , 便知  $f$  在  $A$  上可积, 由于

$$0 \leq f_n \leq f \quad (n = 1, 2, \dots)$$

故  $f$  可作为控制函数, 于是由定理 2 即得 (3.11).

定理 4 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $u_k (k = 1, 2, \dots)$  是  $A$  上的非负可测函数, 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\omega) = f(\omega)$$

则

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A u_k dP$$

证 令

$$f_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

并应用勒维定理即得.

定理 5 (法都 (Fatou)) 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f_n (n=1, 2, \dots)$  是  $A$  上的非负可测函数列, 则

$$\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dP \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP \quad (3.12)$$

证 令

$$u_n(\omega) = \inf\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \dots\}$$

则对任何  $n$ , 有

$$u_n(\omega) \leq f_n(\omega) \quad (3.13)$$

$$0 \leq u_1(\omega) \leq u_2(\omega) \leq \dots$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$$

于是对函数列  $\{u_n\}$  应用勒维定理, 得

$$\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n dP = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A u_n dP$$

即

$$\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dP = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A u_n dP \quad (3.14)$$

由 (3.13) 有

$$\int_A u_n dP \leq \int_A f_n dP$$

故

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A u_n dP \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP \quad (3.15)$$

于是由 (3.14) 与 (3.15) 即得 (3.12)。

### 习 题 4.3

1. 举例说明, 如果没有条件 (3.1), 定理 1 的结论不成立.

2. 举例说明, 如没有  $P(A) < \infty$  的条件, 定理 1 与 2 的推论不成立.

3. 控制函数的存在是否是 (3.2) 中积分与极限交换次序的必要条件?

4. 设  $\Phi(x)$  与  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 是区间  $[a, b]$  上的黎曼可积函数,

$$|f_n(x)| \leq \Phi(x), \quad n=1, 2, \dots$$

在  $[a, b]$  上处处成立, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in [a, b]$$

(1)  $f(x)$  是否黎曼可积?

(2) 在  $f(x)$  黎曼可积的条件下, 下式是否成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx$$

5. 在定理 4 的条件下, 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_A u_k dP < \infty$$

则等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_k(\omega) = 0$$

在  $A$  上几乎处处成立.

6. 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 是  $A$  上的一列可积函数, 如果有  $A$  上的一个可积函数  $g$ , 使得  $f_n \leq g$ , 且

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP > -\infty$$

则函数  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  在  $A$  上可积, 且

$$\int_A \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n dP \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP$$

7. 设  $A$  是具有  $\sigma$ -有限测度的集,  $f_n$  是在  $A$  上收敛于  $f$  的可测函数列, 如果存在常数  $k$ , 使

$$\int_A |f_n| dP < k \quad n=1, 2, \dots$$



则  $f$  在  $A$  上可积。

8. 举例说明法都定理 (3.12) 式中的等号未必成立。

9. 设  $\Omega$  是自然数的全体,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  中一切子集的全体,  $A \in \mathcal{F}$  时, 规定  $P(A) = A$  中自然数的个数, 则定义在  $\Omega$  上的函数  $f$  在  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上可积的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

且在此条件满足时, 有

$$\int_{\Omega} f dP = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

10. 利用上题的结论并应用控制收敛定理证明: 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{m,n} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

是一列级数, 且极限

$$x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m,n}$$

存在 (有限)。如果又存在另外一个正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ , 使对每个  $n$ , 有

$$|x_{m,n}| \leq y_n \quad (m = 1, 2, \dots)$$

则对每个  $m$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{m,n}$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  也绝对收敛, 且

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m,n}$$

注: 从以上两题可以看到, 用关于一般测度的积分概念可以将过去数学分析中的积分和级数问题统一起来处理。

## § 4.4 勒贝格-斯提杰积分

勒贝格积分的重要推广是勒贝格-斯提杰积分 (简称  $L-S$  积分), 它是 § 4.1 与 § 4.2 中所定义的抽象空间上的积分的一个特殊情况。

定义1 设  $F(x)$  是给定的分布函数,  $P$  是由它引出的勒贝格-斯提杰测度,  $R$  是实数的全体,  $\overline{\mathcal{B}}$  是  $R$  中的波莱尔集类  $\mathcal{B}$  对  $P$  的完全化 (在需要强调  $P$ 、 $\overline{\mathcal{B}}$  与  $F(x)$  有关时, 分别将它们改记为  $P_F$  与  $\overline{\mathcal{B}}(F)$ ),  $A \in \overline{\mathcal{B}}$ ,  $f(x)$  是定义在  $A$  上的广义实值函数, 如果  $f(x)$  对测度空间  $(R, \overline{\mathcal{B}}, P)$  可测, 并且积分  $\int_A f(x) dP$  存在, 则称此积分为  $f(x)$  在  $A$  上的勒贝格-斯提杰积分, 并记之为

$$(L-S) \int_A f(x) dF(x) \quad (4.1)$$

如果此积分是一有限数, 则称  $f(x)$  关于  $F(x)$  勒贝格-斯提杰可积.

在  $A$  为区间情况的下列积分 (略去了被积表达式和前面的记号  $L-S$ )

$$\int_{(a; b]}, \int_{[a; b)}, \int_{(a; b)}, \int_{[a; b)}, \int_R$$

也分别记为

$$\int_{a+0}^{b+0}, \int_{a-0}^{b+0}, \int_{a+0}^{b-0}, \int_{a-0}^{b-0}, \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (4.2)$$

类似可以理解下列记号:

$$\int_{a-0}^{+\infty}, \int_{a+0}^{+\infty}, \int_{-\infty}^{a-0}, \int_{-\infty}^{a+0} \quad (4.3)$$

如果  $F(x) \equiv x + c$ , 则 (4.1) 就是通常的勒贝格积分.

在实变函数论中我们知道, 在被积函数连续的情况下, 勒贝格积分可归结为黎曼积分来计算. 与此类似, 在这种情况下, 勒贝格-斯提杰积分也可归结为所谓黎曼-斯提杰积分 (简称  $R-S$  积分) 来计算.

定义2 设  $f(x)$  与  $F(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的两个实值函数, 其中  $F(x)$  是增函数, 在  $[a, b]$  中任意插入若干分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

来划分区间  $[a, b]$ , 记这一分法为  $\Delta$ , 在每个区间  $[x_{k-1}, x_k]$  中任取一点  $\xi_k$  作和

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

令

$$\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$

如果当  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$  时, 不论分法如何, 也不论  $\xi_k$  的取法如何,  $\sigma$  有有限的极限  $I$ , 则称这个极限  $I$  为  $f(x)$  关于  $F(x)$  在区间  $[a, b]$  上的黎曼-斯提杰积分, 记为

$$\begin{aligned} (R-S) \int_a^b f(x) dF(x) &= I \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [F(x_k) - F(x_{k-1})] \end{aligned}$$

确切地说, R-S 积分的定义是: 如果对于任一正数  $\varepsilon$ , 都存在正数  $\delta$ , 使得当  $\lambda(\Delta) < \delta$  时, 不管分法如何,  $\xi_k$  的取法如何, 不等式

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

恒成立, 则称  $I$  为  $f(x)$  关于  $F(x)$  在  $[a, b]$  上的黎曼-斯提杰积分.

当  $F(x) \equiv x + c$  时, 黎曼-斯提杰积分显然就是黎曼积分.

黎曼-斯提杰积分具有以下性质 (以下略去了积分号前的记号 R-S)

$$(1) \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dF(x) = \int_a^b f_1(x) dF(x) + \int_a^b f_2(x) dF(x)$$

$$(2) \int_a^b f(x) d(F_1(x) + F_2(x)) = \int_a^b f(x) dF_1(x) + \int_a^b f(x) dF_2(x)$$

(3) 如果  $k$  与  $l$  是两个常数, 则

$$\int_a^b kf(x)d[LF(x)] = kl \int_a^b f(x)dF(x)$$

以上三式之意是：当右边积分存在时，左边积分也存在，且两边相等。

(4) 如果  $a < c < b$  且下面三个积分都存在，则

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^c f(x)dF(x) + \int_c^b f(x)dF(x)$$

(5) 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  中连续，则  $\int_a^b f(x)dF(x)$  存在。

(6) 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  中连续，而  $F(x)$  处处具有有限导数  $F'(x)$ ，且  $F'(x)$  黎曼可积，则

$$(R-S) \int_a^b f(x)dF(x) = (R) \int_a^b f(x)F'(x)dx$$

当积分区间无限时，也可以按通常方式来定义广义黎曼-斯提杰积分。

定义3 设  $f(x)$  与  $F(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的实值函数，其中  $F(x)$  单增，如果对于任何  $a < b$ ，积分  $\int_a^b f(x)dF(x)$  存在，且极限

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (R-S) \int_a^b f(x)dF(x) = I \quad (4.4)$$

存在，则称此极限为  $f(x)$  关于  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的广义黎曼-斯提杰积分，记为

$$I = (R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \quad (4.5)$$

如果  $I$  有限，则称积分 (4.5) 收敛。

如果

$$(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dF(x) < +\infty$$

则称积分 (4.5) 绝对收敛。

仿照广义黎曼积分的情况可以证明，如果积分 (4.5) 绝对收敛，则它也收敛。

易知，如果  $f(x) \geq 0$ ，且对任何  $a < b$ ， $(R-S) \int_a^b f(x)$

$dF(x)$  存在, 则积分  $(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)$  收敛的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R-S) \int_{-n}^n f(x)dF(x) = I < +\infty$$

且当此条件满足时

$$(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) = I$$

**定理 1** 设  $F(x)$  是分布函数,  $f(x)$  在有限区间  $[a, b]$  上连续, 则

$$(L-S) \int_{(a, b]} f(x)dF(x) = (R-S) \int_a^b f(x)dF(x)$$

**证** 由假设知, 上式两边的积分都存在. 将  $[a, b]$   $n$  等分, 得分法

$$\Delta_n: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = b$$

在区间  $(a, b]$  上定义函数  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 如下:

$$f_n(x) = f(x_k^{(n)}), \text{ 当 } x \in (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 故存在  $M > 0$ , 使得

$$|f_n(x)| \leq M, x \in (a, b], n = 1, 2, \dots$$

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in (a, b]$$

设  $P$  是由  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度, 根据有界收敛定理及  $R-S$  积分的定义有

$$\begin{aligned} (L-S) \int_{(a, b]} f(x)dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a, b]} f_n(x)dF(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) P((x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) [F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})] \\ &= (R-S) \int_a^b f(x)dF(x) \end{aligned}$$

**推论 1** 在定理 1 的假设下, 有

$$(L-S) \int_{(a, b]} f(x)dF(x) = (R-S) \int_a^b f(x)dF(x)$$

$$= (R-S) \int_a^b f(x) dF(x) + f(a)[F(a) - F(a-0)]$$

证 这是因为

$$(L-S) \int_{[a; b]} = (L-S) \int_{(a, b)} \\ + (L-S) \int_{\{a\}} f(x) dF(x)$$

而

$$(L-S) \int_{\{a\}} f(x) dF(x) = F(a)P(\{a\}) \\ = f(a)[F(a) - F(a-0)]$$

**推论 2** 设  $F(x)$  是分布函数,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则  $f(x)$  关于  $F(x)$  勒贝格-斯提杰可积的充要条件是  $(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x)$  绝对收敛, 且在此条件满足时有

$$(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) = (R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \quad (4.6)$$

证 因为就勒贝格-斯提杰积分而言, 可积性和绝对可积性是等价的, 故有

$$(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dF(x) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (R-S) \int_{-n}^n |f(x)| dF(x) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (L-S) \int_{[-n, n]} |f(x)| dF(x) \\ = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dF(x) < \infty$$

因此必要性成立, 因为上式每一步均可逆推, 故充分性也成立.

**引理 1** 设  $f$  是定义在测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的实值可测函数, 对于每个  $B \in \mathcal{B}$ , 令

$$\mu(B) = P(f^{-1}(B)) \quad (4.7)$$

则  $\mu$  是  $\mathcal{B}$  上的测度.

证 显然  $\mu(B) \geq 0$ . 设  $B_n (n=1, 2, \dots)$  是  $\mathcal{B}$  中的互不相交



的集, 则  $f^{-1}(B_n)$  是  $\mathcal{F}$  中互不相交的集, 于是

$$\begin{aligned}\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= P\left(f^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\end{aligned}$$

即  $\mu$  具有可列可加性, 因此它是  $\mathcal{B}$  上的测度.

**定义 4** 设  $\mu$  是由 (4.7) 所定义的测度, 则称测度空间  $(R, \mathcal{B}, \mu)$  为可测函数  $f$  引入的测度空间.  $\mu$  所确定的分布函数  $F(x)$  也称为  $f$  的分布函数. 如果  $\mu$  为有限测度, 则

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = P(f^{-1}((-\infty, x])) = P(f \leq x)$$

是  $f$  的一个分布函数.

下面定理称为积分转化定理, 它把一般抽象空间上积分转化为比较具体、易于研究的  $(L-S)$  积分, 这个定理在概率论中起着重要作用.

**定理 2** 设  $f$  是有限测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的实值可测函数;  $(R, \mathcal{B}, \mu)$  是  $f$  引入的测度空间,  $F(x)$  是  $f$  的分布函数,  $g$  是波莱尔可测函数, 如果积分  $\int_{\Omega} g(f(\omega)) dP$  和  $(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$  中有一个存在, 则另一个也存在, 且

$$\int_{\Omega} g(f(\omega)) dP = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) \quad (4.8)$$

证 分以下四步来讨论:

1°. 设  $B \in \mathcal{B}$ , 令

$$g(x) = \chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in B \\ 0, & \text{当 } x \in B' \end{cases}$$

则

$$\int_{\Omega} g(f(\omega)) dP = P(f^{-1}(B))$$

又

$$(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) = \int_B g(x) dF(x)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{B'} g(x) dF(x) \\
& = \mu(B) = P(f^{-1}(B))
\end{aligned}$$

比较以上二式即得 (4.8)。

2°。设  $g(x)$  是非负简单函数，即设

$$g(x) = a_k, \quad x \in B_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

其中  $a_k \geq 0$ ,

$$B_k \in \mathcal{B}, \quad \sum_{k=1}^n B_k = R$$

则当  $\omega \in f^{-1}(B_k)$  时有

$$g(f(\omega)) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

所以

$$\int_{\Omega} g(f(\omega)) dP = \sum_{k=1}^n a_k P(f^{-1}(B_k))$$

又

$$\begin{aligned}
(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) &= \sum_{k=1}^n \int_{B_k} g(x) dF(x) \\
&= \sum_{k=1}^n a_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^n a_k P(f^{-1}(B_k))
\end{aligned}$$

比较以上二式即得 (4.8)。

3°。设  $g(x)$  是非负波莱尔可测函数，则存在非负简单函数的增序列  $g_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x), \quad x \in R$$

于是

$$g_1(f(\omega)) \leq g_2(f(\omega)) \leq g_3(f(\omega)) \leq \dots, \quad \omega \in \Omega$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(f(\omega)) = g(f(\omega)), \quad \omega \in \Omega$$

易知  $g_n(f(\omega))$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的简单函数，于是由 2° 有

$$\int_{\Omega} g_n(f(\omega)) dP = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dF(x)$$

又由勒维定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(f(\omega)) dP = \int_{\Omega} g(f(\omega)) dP$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dF(x) = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$$

由以上三式即得 (4.8)。

4°. 设  $g(x)$  是任意符号的可测函数, 且

$$g(x) = g^+(x) - g^-(x)$$

易知  $g(f(\omega))$  的正部与负部分别可表示为  $g^+(f(\omega))$  与  $g^-(f(\omega))$ ,

由3°知

$$\int_{\Omega} g^+(f(\omega)) dP = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x) dF(x)$$

$$\int_{\Omega} g^-(f(\omega)) dP = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g^-(x) dF(x)$$

由以上二式知, 如果积分  $\int_{\Omega} g(f(\omega)) dP$  与积分  $(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$  中有一个存在, 则另一个也存在, 且从第一式减去第二式即得 (4.8)。

**推论 1** 设  $\xi(\omega)$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量,  $F(x)$  是其分布函数,  $g$  是波莱尔可测函数, 则  $g(\xi)$  的数学期望可以表为

$$Eg(\xi) = (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) \quad (4.9)$$

其中假定 (4.9) 中有一边存在即可。

**推论 2** 设  $\xi(\omega)$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量,  $F(x)$  是其分布函数,  $g$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数, 则  $g(\xi)$  的数学期望存在且有限的充要条件是积分

$$(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) \quad (4.10)$$

绝对收敛, 且当 (4.10) 绝对收敛时有

$$Eg(\xi) = (R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$$

### 习 题 4.4

1. 设  $f(x) \equiv 1$ , 求 (4.2) 中任两个积分的差.

2. 设  $f(x) \equiv 1$ , 求 (4.3) 中任两个积分的差.

3. 设  $a < c < b$ , 证明由 (R-S)  $\int_a^b f(x) dF(x)$  的存在可推出 (R-S')

$\int_a^c f(x) dF(x)$  与  $\int_c^b f(x) dF(x)$  的存在, 但其逆不真.

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是连续的, 而  $F(x)$  是  $[a, b]$  上的阶梯函数, 即存在  $[a, b]$  的分法:

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} = b$$

使得  $F(x)$  在区间  $(c_{k-1}, c_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ ) 中取常值, 证明

$$\int_a^b f(x) dF(x) = f(a)[F(a+0) - F(a)]$$

$$+ f(b)[F(b) - F(b-0)] + \sum_{k=1}^n f(c_k)[F(c_k+0) - F(c_k-0)]$$

5. 设  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的有界实值函数,  $F(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的单增函数,

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是  $[a, b]$  的任一分法, 令

$$M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$m_k = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$\omega_k = M_k - m_k$$

$$\Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

则 (R-S)  $\int_a^b f(x) dF(x)$  存在的充要条件是

$$\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta F(x_k) = 0$$

6. 在上题关于  $f(x)$  与  $F(x)$  的假设下, 证明 (R-S)  $\int_a^b f(x) dF(x)$  存在的必要条件是  $f(x)$  在  $F(x)$  的所有间断点连续.

7. 在定理 1 的条件下, 用 R-S 积分和 L-S 测度表示下列积分,

$$(1) \quad (L-S) \int_{(a, b)} f(x) dF(x);$$

$$(2) \quad (L-S) \int_{(a; b)} f(x) dF(x).$$

8. 如果将  $(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x)$  绝对收敛的条件改为通常的收

敛, 定理 1 的推论 3 的结论是否成立?

## 第五章 乘积空间

### § 5.1 乘积测度

**定义1** 设  $\Omega_1, \Omega_2$  是任意给定的两个空间,  $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2$  分别为  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  的非空子集, 则称一切有序点偶  $(\omega_1, \omega_2)$  (其中  $\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2$ ) 的全体所组成的集为  $A_1$  与  $A_2$  的积集, 记为  $A_1 \times A_2$ , 即

$$A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}$$

如果  $A_1$  与  $A_2$  中有一个是空集  $\phi$ , 则定义  $A_1 \times A_2 = \phi$ .

积集  $\Omega_1 \times \Omega_2$  也称为乘积空间, 并称  $A_1 \times A_2$  为  $\Omega_1 \times \Omega_2$  中的矩形,  $A_1, A_2$  则称为矩形  $A_1 \times A_2$  的边.

$(\omega_1, \omega_2)$  也称为  $\Omega_1 \times \Omega_2$  中的点, 其中  $\omega_1 \in \Omega_1$  和  $\omega_2 \in \Omega_2$  分别称为这个点的第一坐标和第二坐标.

**例1** 设  $R$  表示数直线, 则  $R \times R$  就是实平面, 通常用  $R^2$  表示.

**例2** 设  $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}, \Omega_2 = \{a, b\}$ . 则

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

乘积空间中的矩形具有下面的一些性质.

**引理1** 如果  $A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2$  都是非空矩形, 则  $A \subset B$  的充要条件是  $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$ .

**证** 充分性是显然的, 下面证必要性. 设  $A \subset B$ , 如果  $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$  中有一个不成立, 例如  $A_1 \subset B_1$  不成立, 则存在  $\omega_1^* \in A_1$  而  $\omega_1^* \notin B_1$ , 由于  $A = A_1 \times A_2$  非空, 故存在  $\omega_2^* \in A_2$ ,



于是  $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in A$ , 而  $(\omega_1^*, \omega_2^*) \notin B$ , 这与假设  $A \subset B$  矛盾, 所以必须有  $A_1 \subset B_1$ , 同样  $A_2 \subset B_2$ .

**推论** 在引理的条件下,  $A = B$  的充要条件是  $A_1 = B_1$ ,  $A_2 = B_2$ .

### 引理 2

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \quad (1.1)$$

**证**  $(\omega_1, \omega_2) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\omega_1, \omega_2) \in A_1 \times A_2 \text{ 且 } (\omega_1, \omega_2) \\ &\quad \in B_1 \times B_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2 \text{ 且 } \omega_1 \in B_1, \omega_2 \in B_2$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 \in A_1, \omega_1 \in B_1 \text{ 且 } \omega_2 \in A_2, \omega_2 \in B_2$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 \in A_1 \cap B_1 \text{ 且 } \omega_2 \in A_2 \cap B_2$$

$$\Leftrightarrow (\omega_1, \omega_2) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

$\therefore$  (1.1) 式成立.

### 引理 3

$$\begin{aligned} (A_1 + B_1) \times (A_2 + B_2) &= A_1 \times A_2 + A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2 \\ &\quad + B_1 \times B_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1.2) 式的成立是显然的, 此式表明积对于直和是可分配的.

### 引理 4

$$\begin{aligned} &(A_1 \times A_2) - (B_1 \times B_2) \\ &= (A_1 \cap B_1) \times (A_2 - B_2) + (A_1 - B_1) \times (A_2 \cap B_2) \\ &\quad + (A_1 - B_1) \times (A_2 - B_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

**证**  $(A_1 \times A_2) - (B_1 \times B_2)$

$$= (A_1 \times A_2) - (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$$

$$= (A_1 \times A_2) - (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \quad (\text{由引理 2})$$

$$= [(A_1 \cap B_1) + (A_1 - B_1)] \times [(A_2 \cap B_2)$$

$$\begin{aligned}
& + (A_2 - B_2)] - (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \\
= & (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) + (A_1 \cap B_1) \times (A_2 - B_2) \\
& + (A_1 - B_1) \times (A_2 \cap B_2) + (A_1 - B_1) \times (A_2 - B_2) \\
& - (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \quad (\text{由引理 3}) \\
= & (A_1 \cap B_1) \times (A_2 + B_2) + (A_1 - B_1) \\
& \times (A_2 \cap B_2) + (A_1 - B_1) \times (A_2 - B_2)
\end{aligned}$$

**引理 5** 如果集类  $\mathcal{F}$  对差与直和运算封闭, 则  $\mathcal{F}$  是环.

**证** 因为

$$A \cup B = A + (B - A)$$

故如果  $\mathcal{F}$  为差与直和运算封闭, 则  $\mathcal{F}$  也对和运算封闭, 因而  $\mathcal{F}$  是环.

**定理 1** 设  $\mathcal{F}_1$  与  $\mathcal{F}_2$  分别是  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  的某些子集所构成的环. 则由有限个互不相交的形如  $A_1 \times A_2$  ( $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ ) 的矩形的和集的全体所组成的类  $\mathcal{A}$  是一个环.

**证**  $\mathcal{F}$  对直和封闭是显然的, 由此根据引理 4 知,  $\mathcal{F}$  对差也是封闭的, 于是由引理 5 知  $\mathcal{F}$  是环.

定理 1 中的环  $\mathcal{F}$  也记为  $\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$ .

**定义 2** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是两个可测空间, 记

$$\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

并用  $\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$  表示包含  $\mathcal{A}$  的最小  $\sigma$ -代数, 则称可测空间

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2})$$

为可测空间  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  的乘积(可测)空间,  $\mathcal{A}$  中的集称为可测矩形.

**定理 2** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是可测空间, 则

$$\sigma(\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}) = \sigma(\mathcal{A}) \quad (1.4)$$

证 由定理 1,  $\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$  是包含  $\mathcal{A}$  的最小环, 故  $\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} \subset \sigma(\mathcal{A})$ , 因而  $\sigma(\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ . 另一方面, 由于  $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$ , 故又有  $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\widehat{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2})$ . 从而 (1.4) 式成立.

**定义 3** 设  $R$  表示数直线,  $(R, \mathcal{B})$  是一维波莱尔可测空间, 则称  $(R \times R, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$  为二维波莱尔可测空间.  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$  中的集称为二维波莱尔集,  $(R \times R, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$  上的实值可测函数称为二元波莱尔可测函数.

二维波莱尔可测空间也可用记号  $(R^2, \mathcal{B}_2)$  表示.

**定义 4** 设  $A$  与  $B$  是数直线  $R$  中任两个区间, 则称  $A \times B$  为  $R^2$  中的区间 (也称二维区间). 例如  $[0, 1] \times [1, 2]$ ,  $(-\infty, 1] \times (0, +\infty)$  都是  $R^2$  中的区间.

设

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a] \times (-\infty, b] \mid a, b \in R\}$$

仿照 § 1.2 中的一维情况不难证明

$$\mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{A})$$

**定义 5** 设  $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ , 对于任意固定的  $\omega_1 \in \Omega_1$ , 称集

$$\{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

为  $A$  的  $\omega_1$  截口 (或被  $\omega_1$  决定的  $A$  的截口), 并记为  $A(\omega_1, \cdot)$ . 同样, 对于任意固定的  $\omega_2 \in \Omega_2$ , 称

$$A(\cdot, \omega_2) = \{\omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

为  $A$  的  $\omega_2$  截口.

由定义知,  $A(\omega_1, \cdot)$  是  $\Omega_2$  的子集,  $A(\cdot, \omega_2)$  是  $\Omega_1$  的子集.

**引理 6** 设  $A_n, A, B$  都是  $\Omega_1 \times \Omega_2$  的子集, 则

$$(1) \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) (\omega_1, \cdot) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n (\omega_1, \cdot);$$

$$(2) \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right) (\omega_1, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\omega_1, \cdot);$$

$$(3) \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) (\omega_1, \cdot) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n (\omega_1, \cdot);$$

$$(4) (A - B) (\omega_1, \cdot) = A (\omega_1, \cdot) - B (\omega_1, \cdot).$$

对于 $\omega_2$ 截面有相应的公式。

证明是显然的，留作习题。

**定理 3**  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测集的每一个 $\omega_1$ 截面是 $\mathcal{F}_2$ -可测集，每一个 $\omega_2$ 截面是 $\mathcal{F}_1$ -可测集。

证 设 $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ ， $A$ 的每一个 $\omega_1$ 截面是 $\mathcal{F}_2$ -可测集，每一个 $\omega_2$ 截面是 $\mathcal{F}_1$ -可测集，所有具有这种性质的集 $A$ 所组成的类记为 $\mathcal{F}$ 。由引理 6 知， $\mathcal{F}$  是一 $\sigma$ -代数，又显然 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  ( $\mathcal{A}$  是所有可测矩形所组成的类)，从而 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ ，因此 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  中的每一个集的截面都是可测集。

**定义 6** 设 $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ ， $f$  是定义在 $A$  上的函数，当 $\omega_1 \in \Omega_1$  固定时，如果 $A(\omega_1, \cdot)$  不是空集，则称定义在 $A(\omega_1, \cdot)$  上的函数

$$f_{\omega_1}(\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2) \quad \omega_2 \in A(\omega_1, \cdot)$$

为 $f$  的 $\omega_1$ 截面 (或被 $\omega_1$  决定的 $f$  的截面)。同样，对于固定的 $\omega_2 \in \Omega_2$ ，如果 $A(\cdot, \omega_2)$  不是空集，则称定义在 $A(\cdot, \omega_2)$  上的函数

$$f^{\omega_2}(\omega_1) = f(\omega_1, \omega_2) \quad \omega_1 \in A(\cdot, \omega_2)$$

为 $f$  的 $\omega_2$ 截面。

**定理 4** 设 $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ， $f$  是 $A$  上的可测函数，则 $f$  的每一个 $\omega_1$ 截面是 $\mathcal{F}_2$ -可测函数，每一个 $\omega_2$ 截面是 $\mathcal{F}_1$ -可测函数。

证 对于任何实数 $c$  和任何给定的 $\omega_1 \in \Omega_1$  有

$$\{\omega_2 \mid f_{\omega_1}(\omega_2) \leq c, \omega_2 \in A(\omega_1, \cdot)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\omega_2 \mid f(\omega_1, \omega_2) \leq c, (\omega_1, \omega_2) \in A\} \\
&= \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A(f \leq c)\}
\end{aligned}$$

由此可知，上式中的集是  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测集  $A(f \leq c)$  的  $\omega_1$  截口，因而是  $\mathcal{F}_2$ -可测集，于是就证明了  $f_{\omega_1}$  是  $\mathcal{F}_2$ -可测函数。类似地可以证明  $f_{\omega_2}$  是  $\mathcal{F}_1$ -可测函数。

**引理 7** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是两个  $\sigma$ -有限的测度空间， $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ，则  $P_2(A(\omega_1, \cdot))$  是  $\mathcal{F}_1$ -可测函数， $P_1(A(\cdot, \omega_2))$  是  $\mathcal{F}_2$ -可测函数，且

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\
&= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2 \quad (1.5)
\end{aligned}$$

**证** 先就  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  为有限的情形来证明。设  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  是具有定理中所述性质的任一集， $\mathcal{F}$  是所有这种  $A$  所组成的类，下面我们证明  $\mathcal{F}$  具有以下性质：

(1) 设  $\mathcal{A}$  是所有可测矩形组成的类，证明  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ 。

设  $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$ ，则

$$A(\omega_1, \cdot) = \begin{cases} A_2, & \omega_1 \in A_1 \\ \phi, & \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$$

故

$$P_2(A(\omega_1, \cdot)) = \begin{cases} P_2(A_2), & \omega_1 \in A_1 \\ 0, & \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$$

同理

$$P_1(A(\cdot, \omega_2)) = \begin{cases} P_1(A_1), & \omega_2 \in A_2 \\ 0, & \omega_2 \notin A_2 \end{cases}$$

这两个函数分别为  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  中的简单函数，因而分别  $\mathcal{F}_1$ -可测和  $\mathcal{F}_2$ -可测。显然有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 &= P_2(A_2)P_1(A_1) \\ &= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

故  $A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}$ . 特别有

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{F} \quad (1.7)$$

(2) 证明对直和封闭.

设  $A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{F}$ ,  $E = A + B$ , 则

$$\begin{aligned} P_2(E(\omega_1, \cdot)) &= P_2(A(\omega_1, \cdot) + B(\omega_1, \cdot)) \\ &= P_2(A(\omega_1, \cdot)) + P_2(B(\omega_1, \cdot)) \end{aligned}$$

因为  $P_2(A(\omega_1, \cdot))$ ,  $P_2(B(\omega_1, \cdot))$  为  $\mathcal{F}_1$ -可测, 故  $P_2(E(\omega_1, \cdot))$   $\mathcal{F}_1$ -可测. 同理

$$P_1(E(\cdot, \omega_2)) = P_1(A(\cdot, \omega_2)) + P_1(B(\cdot, \omega_2))$$

$\mathcal{F}_2$ -可测. 由于  $A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , 故

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 &= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2 \\ \int_{\Omega_1} P_2(B(\omega_1, \cdot)) dP_1 &= \int_{\Omega_2} P_1(B(\cdot, \omega_2)) dP_2 \end{aligned}$$

于是根据积分的线性性, 由以上四式即得

$$\int_{\Omega_1} P_2(E(\omega_1, \cdot)) dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(E(\cdot, \omega_2)) dP_2$$

所以  $E \in \mathcal{F}$ .

由归纳法知, 如果  $A_k \in \mathcal{F}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 且  $A = \sum_{k=1}^n A_k$ ,

则  $A \in \mathcal{F}$ .

(3) 证明  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ .

这是 (1) 与 (2) 的直接推论.

(4) 证明  $\mathcal{F}$  是单调类.

设  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且



$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots$$

记  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , 由于

$$A_1(\omega_1, \cdot) \subset A_2(\omega_1, \cdot) \subset A_3(\omega_1, \cdot) \subset \cdots$$

$$A(\omega_1, \cdot) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_1, \cdot)$$

所以

$$P_2(A(\omega_1, \cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(A_n(\omega_1, \cdot))$$

又因为

$$P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) \leq P_2(\Omega_2) \\ (n = 1, 2, \cdots)$$

故由有界收敛定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\ = \int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 \quad (1.8)$$

类似有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} P_1(A_n(\cdot, \omega_2)) dP_2 \\ = \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2 \quad (1.9)$$

由假设

$$\int_{\Omega_1} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\ = \int_{\Omega_2} P_1(A_n(\cdot, \omega_2)) dP_2$$

故由(1.8)与(1.9)有

$$\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\ = \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2$$

因此  $A \in \mathcal{F}$ . 类似可证, 如果  $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ , 且

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

则  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ . 因而  $\mathcal{F}$  是单调类.

设  $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  是包含  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  的最小单调类, 则

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}$$

由 § 1.2 的定理 5 知

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$$

故  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ . 从而  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ .

下面我们就  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  均为  $\sigma$ -有限的一般情况来证明. 这时存在  $A_i^{(n)} \in \mathcal{F}_i$ , 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_i^{(n)} = \Omega_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.10)$$

$$P_i(A_i^{(n)}) < +\infty \quad (i = 1, 2; n = 1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

将  $A_1^{(m)}$  与  $A_2^{(n)}$  分别视为前一情形中的  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$ , 于是对于每个  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  和每个  $m, n$ ,  $P_2(A(\omega_1, \cdot) \cap A_2^{(n)})$  是  $\mathcal{F}_1$ -可测函数,  $P_1(A(\cdot, \omega_2) \cap A_1^{(m)})$  是  $\mathcal{F}_2$ -可测函数, 且

$$\begin{aligned} & \int_{A_1^{(m)}} P_2(A(\omega_1, \cdot) \cap A_2^{(n)}) dP_1 \\ &= \int_{A_2^{(n)}} P_1(A(\cdot, \omega_2) \cap A_1^{(m)}) dP_2 \end{aligned}$$

再由测度的可列可加性和 § 4.3 关于积分的极限定理 4, 有

$$\begin{aligned} P_2(A(\omega_1, \cdot)) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_2(A(\omega_1, \cdot) \cap A_2^{(n)}) \\ P_1(A(\cdot, \omega_2)) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_1(A(\cdot, \omega_2) \cap A_1^{(m)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_1^{(m)}} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_1^{(m)}} P_2(A(\omega_1, \cdot) \cap A_2^{(n)}) dP_1 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_1^{(n)}} P_1(A(\cdot, \omega_2) \cap A_1^{(m)}) dP_2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_1^{(n)}} P_1(A(\cdot, \omega_2) \cap A_1^{(m)}) dP_2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_1^{(n)}} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2 \\
&= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2
\end{aligned}$$

即(1.5)式成立。

**定理 5** 设 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 与 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 是 $\sigma$ -有限的测度空间,  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , 令

$$\begin{aligned}
P(A) &= \int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\
&= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2
\end{aligned} \tag{1.12}$$

则 $P$ 是 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ 上的 $\sigma$ -有限测度, 且

$$\begin{aligned}
P(A_1 \times A_2) &= P_1(A_1)P_2(A_2), \\
A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2
\end{aligned} \tag{1.13}$$

上述测度 $P$ 称为 $P_1$ 和 $P_2$ 的乘积测度, 记为 $P_1 \times P_2$ ;  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$ 称为测度空间 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 与 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 的乘积测度空间,  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 与 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 则称为 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$ 的分支测度空间。

**证** 由(1.6)可得(1.13)。下面只验证 $P$ 具有可列可加性, 测度的其余条件 $P$ 显然满足。设 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 中一系列互不相交的集, 则由§4.3的定理4有

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega_1} P_2\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)(\omega_1, \cdot)\right) dP_1 \\
&= \int_{\Omega_1} P_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_1, \cdot)\right) dP_1 \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

故可列可加性成立。由 (1.10) 与 (1.11), 令

$$A_{mn} = A_1^{(m)} \times A_2^{(n)}, m, n = 1, 2, \dots$$

因  $P(A_{mn}) = P_1(A_1^{(m)}) \times P_2(A_2^{(n)}) < +\infty$

而  $\Omega_1 \times \Omega_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}$

故  $P$  是  $\sigma$ -有限的。

**定理 6** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是  $\sigma$ -有限测度空间, 则  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  上满足条件 (1.13) 的测度  $P$  是唯一的。

**证** 设  $P'$  是  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  上满足条件 (1.13) 的另一个测度。由于对任何  $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ ,

$$P(A_1 \times A_2) = P'(A_1 \times A_2)$$

且  $P$  与  $P'$  都具有可加性, 故对于任何  $A \in \overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$ , 有

$$P(A) = P'(A)$$

又因为  $\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$  是环, 故根据测度拓展定理知,  $P$  与  $P'$  在  $\sigma$

$(\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2})$  上一致, 然而  $\sigma(\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , 所以

$P$  与  $P'$  在  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  上一致。

### 习 题 5.1

1. 设  $A$  是乘积空间  $\Omega_1 \times \Omega_2$  中的矩形, 如果  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , 则称  $A$  是可测矩形. 说明此处的定义与正文中的定义是等价的.

2. 证明可列个矩形的交是矩形.

3. 证明非空矩形的形如  $D = A \times B$  的表达式是唯一的, 即如果

$$A \times B = E \times F$$

则有  $A = E, B = F$ .

4. 设  $A \in \Omega_1 \times \Omega_2$ , 如果  $A$  的每一个  $\omega_1$  截面是  $\mathcal{F}_2$ -可测集, 每一个  $\omega_2$  截面是  $\mathcal{F}_1$ -可测集,  $A$  是否为  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测集?

5. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  是任一可测空间,  $\Omega_2$  是数直线,  $\mathcal{F}_2$  是波莱尔集的全体,  $f$  是定义在  $\Omega_1$  上的非负实值函数, 则分别称  $\Omega_1 \times \Omega_2$  的子集

$$V^*(f) = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, 0 \leq \omega_2 \leq f(\omega_1)\}$$

与

$$V_*(f) = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, 0 \leq \omega_2 \leq f(\omega_1)\}$$

为  $f$  的上纵标集和下纵标集, 而称集

$$\{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, f(\omega_1) = \omega_2\}$$

为  $f$  (不限定是非负的) 的图形. 证明:

(1) 如果  $f$  是非负可测函数, 则  $V^*(f)$  与  $V_*(f)$  都是可测集;

(2) 可测函数的图形是  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测集.

6. 设

$$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, a] \times (-\infty, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(-\infty, a) \times (-\infty, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{A}_4 = \{[a, b] \times [c, d] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{A}_5 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{A}_6 = \{(a, +\infty) \times [b, +\infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

证明

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = \mathcal{B}_2 \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

7. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是两个可测空间,  $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{A}_1)$ ,  $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{A}_2)$ , 其中  $\mathcal{A}_1$  与  $\mathcal{A}_2$  分别表示  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  的某些子集所组成的类, 令

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

下式是否成立:

$$\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$$

8. 证明二元连续函数是波莱尔可测函数。

9. 设  $f_1(\omega_1)$  是  $\mathcal{F}_1$ -可测函数,  $f_2(\omega_2)$  是  $\mathcal{F}_2$ -可测函数. 证明  $f_1(\omega_1), f_2(\omega_2)$  是  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数。

10. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  是任一测度空间,  $\Omega_2$  是数直线,  $\mathcal{F}_2$  是波莱尔可测集的全体,  $P_2$  是勒贝格测度,  $f$  是  $\Omega_1$  上的实值可测函数. 证明  $f$  的图形 (定义见习题 5) 的  $P_1 \times P_2$  测度为零。

11. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  是  $\sigma$ -有限测度空间,  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是数直线, 其中  $\mathcal{F}_2$  是波莱尔集的全体,  $P_2$  是勒贝格测度. 又设  $P = P_1 \times P_2$ ,  $f$  是  $\Omega_1$  上的非负可积函数, 则

$$P(V_*(f)) = P(V^*(f))$$

$$= \int_{\Omega} f dP_1$$

12. 在上题的条件下, 可测函数的图形是  $P_1 \times P_2$  测度为零的集。

设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是  $\sigma$ -有限测度空间,  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ,  $P = P_1 \times P_2$ . 则  $P(A) = 0$  的充要条件是

$$P_1(A(\cdot, \omega_2)) \stackrel{\circ}{=} 0 [P_2]$$

或

$$P_2(A(\omega_1, \cdot)) \stackrel{\circ}{=} 0 [P_1]$$

13. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是  $\sigma$ -有限的完全测度空间.  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$  是否也是完全测度空间?

14. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是  $\sigma$ -有限测度空间, 把它们的乘积空间  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$  拓展为完全测度空间, 记



拓展后的可测集的全体为  $\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$ , 拓展后的测度仍记为

$$P = P_1 \times P_2$$

(1) 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  都是  $\sigma$ -有限的完全测度空间, 如果  $A \in \overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$ , 则对几乎所有 (按  $P_1$ ) 的  $\omega_1 \in \Omega_1$ , 截面  $A(\omega_1, \cdot) \in \mathcal{F}_2$ , 对几乎所有 (按  $P_2$ ) 的  $\omega_2 \in \Omega_2$ , 截面  $A(\cdot, \omega_2) \in \mathcal{F}_1$ .

(2) 设  $f(\omega_1, \omega_2)$  是  $\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}$ -可测函数, 则对几乎所有 (按  $P_1$ ) 的  $\omega_1 \in \Omega_1$ , 截面  $f_{\omega_1}(\omega_2)$  是  $\mathcal{F}_2$ -可测函数, 对几乎所有 (按  $P_2$ ) 的  $\omega_2 \in \Omega_2$ , 截面  $f^{\omega_2}(\omega_1)$  是  $\mathcal{F}_1$ -可测函数.

(3)  $\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} = \overline{\mathcal{F}_1} \times \overline{\mathcal{F}_2}$  是否成立? 其中  $\overline{\mathcal{F}_i}$  ( $i=1, 2$ ) 表示  $\mathcal{F}_i$  的完全化.

## § 5.2 富比尼 (Fubini) 定理

本节的目的是要建立重积分的概念, 并研究重积分和累次积分的关系, 以及累次积分中变换积分次序的问题.

定义 1 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是两个  $\sigma$ -有限的测度空间,  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$  是它们的乘积空间,  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ,  $f(\omega_1, \omega_2)$  是定义在  $A$  上关于  $P_1 \times P_2$  可积的函数, 则称积分

$$\int_A f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2$$

为  $f$  在  $A$  上的重积分.

如果  $A = A_1 \times A_2$  且  $f^{(\omega_2)}(\omega_1)$  在  $A_1$  上关于  $P_1$  可积, 记

$$h(\omega_2) = \int_{A_1} f^{(\omega_2)}(\omega_1) dP_1$$

又如果  $h(\omega_2)$  在  $A_2$  上关于  $P_2$  可积, 则记

$$\int_{A_2} h(\omega_2) dP_2 = \int_{A_2} \left[ \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \right] dP_2$$

$$= \int_{A_2} \int_{A_1} f dP_1 dP_2$$

$$= \int_{A_2} dP_2 \int_{A_1} f dP_1$$

上述积分称为  $f$  在  $A$  上的二次积分 (或累次积分)。

类似地定义

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \int_{A_2} f dP_2 dP_1 &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f dP_2 \\ &= \int_{A_1} \left[ \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \right] dP_1 \end{aligned}$$

它也是  $f$  在  $A$  上的二次积分。

**定理 1 (富比尼)** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是两个  $\sigma$ -有限的测度空间,  $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  是可测矩形,  $f(\omega_1, \omega_2)$  是  $A$  上的非负  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数, 则

$$(1) \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \text{ 是 } \mathcal{F}_1\text{-可测函数, } \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2)$$

$dP_1$  是  $\mathcal{F}_2$ -可测函数;

(2) 下面的等式成立

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ &= \int_{A_1} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

**证** 分以下几个步骤来证明。

1° 设  $f$  是  $A$  的某个可测子集的特征函数, 即

$$f = \chi_E, \quad E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \quad E \subset A$$

则根据上节引理 7 及 (1.12), 有

$$\begin{aligned} \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 &= \int_{A_1} P_2(E(\omega_1, \cdot)) dP_1 \\ &= P(E) \end{aligned}$$

$$\int_{A_1} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{A_2} P_1(E(\cdot, \omega_2)) dP_2 \\
 &= P(E)
 \end{aligned}$$

又

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 = P(E)$$

由以上三式知，对于  $f = \chi_E$ ，定理的结论成立。

2° 根据1°和积分的线性性易知，如果定理的结论对非负  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数  $f_1$  与  $f_2$  成立，则对于任何  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ，定理的结论对

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2$$

也成立。

3° 因为简单函数可用特征函数的线性组合来表示，故根据归纳法，由2°知，定理的结论对非负简单函数成立。

4° 设  $f$  是一般的非负  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数，则根据 § 3.3 的引理 1 知，存在  $A$  上的非负简单函数的增序列  $\{f_n\}$ ，使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$$

在  $A$  中处处成立，由3°知，定理的结论对  $f_n$  成立，于是由勒维

$$\begin{aligned}
&= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\
&= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2
\end{aligned}$$

同理有

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 = \int_{A_2} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$$

**推论** 设  $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ,  $f(\omega_1, \omega_2)$  是  $A$  上的非负  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数, 如果

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 < +\infty$$

则  $\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$  在  $A_1$  上关于  $P_1$  几乎处处有限,  $\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$  在  $A_2$  上关于  $P_2$  几乎处处有限.

**定理 2 (富比尼)** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是两个  $\sigma$ -有限的测度空间,  $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  是可测矩形,  $f(\omega_1, \omega_2)$  是  $A$  上的可积函数, 则

(1) 对几乎所有的  $\omega_1 \in A_1$ ,  $f(\omega_1, \omega_2)$  (看作是截口  $f_{\omega_1}(\omega_2)$ ) 是  $A_2$  上关于  $P_2$  可积的函数.

(2) 设  $\Delta_1$  表示使 (1) 中的结论成立的  $\omega_1 \in A_1$  的全体, 则函数

$$\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

在  $\Delta_1$  上关于  $P_1$  可积.

(3) 成立下面的等式

$$\begin{aligned}
&\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 \\
&= \int_{\Delta_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \quad (2.2)
\end{aligned}$$

注: 为方便起见, 我们将积分记号的涵义扩充如下: 设  $f$  是在可测集  $A$  上定义的可积函数,  $E$  是如下的可测集:

$$E \supset A, P(E - A) = 0$$

则我们定义

$$\int_E f dP = \int_A f dP$$

因此，对于一个积分，积分号下的函数不必在积分范围上全有意义，而只要在此范围上几乎处处有意义即可。根据这种扩充了的积分记号的意义，富比尼定理中的等式 (2.2) 可简化为

$$\begin{aligned} & \int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 \\ &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

证 令

$$\Delta_1^+ = \left\{ \omega_1 \mid \int_{A_2} f^+(\omega_1, \omega_2) dP_2 < +\infty, \omega_1 \in A_1 \right\}$$

$$\Delta_1^- = \left\{ \omega_1 \mid \int_{A_2} f^-(\omega_1, \omega_2) dP_2 < +\infty, \omega_1 \in A_1 \right\}$$

$$\Delta_1 = \Delta_1^+ \cap \Delta_1^-$$

则由定理 1 的推论有

$$P_1(\Delta_1) = P_1(\Delta_1^+) = P_1(\Delta_1^-) = P(A_1) \quad (2.4)$$

于是根据定理 1 及上式得

$$\begin{aligned} & \int_{A_1 \times A_2} f^+(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 = \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f^+(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ &= \int_{\Delta_1} dP_1 \int_{A_2} f^+(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ & \int_{A_1 \times A_2} f^-(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 \\ &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f^-(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ &= \int_{\Delta_1} dP_1 \int_{A_2} f^-(\omega_1, \omega_2) dP_2 \end{aligned}$$

將以上兩式相減，即得

$$\begin{aligned} & \int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 \\ &= \int_{A_1} \left[ \int_{A_2} f^+(\omega_1, \omega_2) dP_2 - \int_{A_2} f^-(\omega_1, \omega_2) dP_2 \right] dP_1 \\ &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \end{aligned}$$

即 (2.3) 式成立。

用同樣的證明方法可得到如下與定理 2 對偶的定理：

**定理 3 (富比尼)** 在定理 2 的假設下，有

(1) 對幾乎所有的  $\omega_2 \in A_2$ ， $f(\omega_1, \omega_2)$  (看作是截口  $f^{\omega_2}(\omega_1)$ ) 是  $A_1$  上關於  $P_1$  可積的函數。

(2) 設  $\Delta_2$  表示使 (1) 中的結論成立的  $\omega_2 \in A_2$  的全體，則函數

$$\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$$

在  $\Delta_2$  上關於  $P_2$  可積。

(3) 下面的等式成立：

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 &= \int_{\Delta_2} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \\ &= \int_{\Delta_2} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \end{aligned}$$

**定理 4** 在定理 2 的假設下，存在如下兩個累次積分

$$\begin{aligned} & \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ & \int_{A_2} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

且



$$\begin{aligned} & \int_{A_1} dP_1 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \\ &= \int_{A_1} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

注：在 (2.6) 式中的积分号的涵义已经扩充（参看定理 2 之注）。

证 这是定理 2 与定理 3 的直接推论。

定理 5 在定理 1 的条件下，如果 (2.5) 中有一个累次积分为有限，则  $f(\omega_1, \omega_2)$  在  $A$  上可积且 (2.6) 成立。

证 用反证法，设 (2.5) 中的第一个积分为有限，但

$$\int_{A_1 \times A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 = +\infty$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_1 \times A_1} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2 = +\infty$$

于是当  $n$  充分大时，有

$$\begin{aligned} & \int_{A_1 \times A_1} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2 > \\ & \int_{A_1} dP_1 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

然而，因为  $[f(\omega_1, \omega_2)]_n$  在  $A$  上可积，故有

$$\begin{aligned} & \int_{A_1 \times A_1} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2 \\ &= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_1} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_2 \end{aligned}$$

但  $[f(\omega_1, \omega_2)]_n \leq f(\omega_1, \omega_2)$ ，故有

$$\begin{aligned} & \int_{A_1 \times A_1} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2 \\ & \leq \int_{A_1} dP_1 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \end{aligned}$$

这与 (2.7) 矛盾。

推论 设  $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ,  $f(\omega_1, \omega_2)$  是  $A$  上的  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数, 且

$$\int_{A_1} dP_1 \int_{A_1} |f(\omega_1, \omega_2)| dP_2 < +\infty$$

则 (2.5) 中两个累次积分都存在, 且 (2.6) 式成立.

### 习 题 5.2

1. 举例说明, 即使累次积分

$$\int_{A_1} dP_1 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

$$\int_{A_1} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$$

都存在, 两者也未必相等.

提示: 考虑函数

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \omega_2^2, & \text{当 } 0 < \omega_1 < \omega_2 < 1 \\ -\omega_1^2, & \text{当 } 0 < \omega_2 < \omega_1 < 1 \\ 0, & \text{其它的 } 0 \leq \omega_1 \leq 1, 0 \leq \omega_2 \leq 1 \end{cases}$$

2. 如果上题中的两个累次积分存在、有限且相等, 二重积分

$$\int_{A_1 \times A_2} f dP_1 \times P_2 \text{ 是否一定存在?}$$

3. 设  $f_i(\omega_i)$  是  $\sigma$ -有限测度空间  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$  ( $i=1, 2$ ) 上的可积函数, 证明

(1)  $f_i(\omega_1, \omega_2) = f_i(\omega_i)$  是  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数 ( $i=1, 2$ );

(2)  $f(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)$  是  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -可测函数;

$$(3) \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 = \left[ \int_{\Omega_1} f_1(\omega_1) dP_1 \right] \left[ \int_{\Omega_2} f_2(\omega_2) dP_2 \right].$$

4. 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  与  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  是两个  $\sigma$ -有限的测度空间,  $A = A_1 \times A_2$  是可测矩形,  $f(\omega_1, \omega_2)$  是  $A$  上的可测函数. 举例说明, 即使  $f$  在  $A$  上可积, 也未必对所有的  $\omega_1 \in A_1$  积分  $\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$  都存

在；同样，也未必对所有的  $\omega_2 \in A_2$  积分  $\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$  都存在。

5. 用富比尼定理证明 § 4.3 的定理 4：设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是  $\sigma$ -有限测度空间， $f_n(\omega)$  是非负  $\mathcal{F}$ -可测函数，则

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega) \right] dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) dP$$

提示：令

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$\Omega_2 = \{\text{正整数}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \Omega_2 \text{ 的一切子集的全体}$$

$$P_2(A) = A \text{ 中的元素的个数, } A \in \mathcal{F}_2$$

$$f_n(\omega) = f(\omega, n)$$

### § 5.3 二维勒贝格-斯提杰测度与 二维勒贝格-斯提杰积分

直线上的勒贝格-斯提杰测度和勒贝格-斯提杰积分的概念可以推广到多维空间。本节中我们考察平面的情形。由所述的推理方法容易看出对于维数更大的空间应作怎样的改变。

定义 1 设  $R^2$  是平面上的点的全集， $\mathcal{B}_2$  是  $R^2$  中波莱尔集的全集。P 是  $(R^2, \mathcal{B}_2)$  上的测度。如果 P 在二维有限区间上取有限值，即

$$P([a, b] \times [c, d]) < +\infty, a, b, c, d \in R$$

则称 P 为二维(平面上的)勒贝格-斯提杰测度，并称  $(R^2, \mathcal{B}_2, P)$  上的可测函数关于 P 的积分为勒贝格-斯提杰积分。有时也称  $\overline{\mathcal{B}_2}$  上 P 的完全化测度为勒贝格-斯提杰测度，相应的积分也称为勒贝格-斯提杰积分

为叙述简单起见，下面我们仅讨论 P 为有限测度（即设

$P(R^2) < +\infty$  的特殊情况。

定义2 设  $P$  是  $\mathcal{B}_2$  上的有限测度, 则称定义在  $R^2$  上的函数

$$F(x, y) = P((-\infty, x] \times (-\infty, y]), (x, y) \in R^2$$

为  $P$  的分布函数。

$(R^2, \mathcal{B}_2, P)$  上的勒贝格-斯提杰积分  $\int_{R^2} g(x, y) dP$  也用记号

$$(L-S) \int_{R^2} g(x, y) dF(x, y)$$

或  $(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dF(x, y)$  来表示。

定理1 设  $P$  是  $\mathcal{B}_2$  上的有限测度, 则  $P$  的分布函数  $F(x, y)$  具有如下性质:

(1)  $F(x, y)$  是每个自变量的增函数且右连续;

(2) 对任意固定的  $y$ ,

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

对任意固定的  $x$ ,

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

$$F(-\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 0$$

(3)  $F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) < +\infty$ 。

(4) 对于  $R^2$  中的任意点  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$ , 当  $x_1 < x_2$ ,  $y_1 < y_2$  时, 下面的不等式成立:

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

上式左边的式子称为  $F(x, y)$  的二阶差分, 记为  $\Delta F(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 。

前三个性质可以仿照一维的情况证明。例如, 根据测度的

下连续性及  $P$  的有限性即可推出 (3) :

$$F(+\infty, +\infty) = P(R^2) < +\infty \quad (3.1)$$

下面我们来证明性质 (4)

令

$$D_{x,y} = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$$

则

$$F(x, y) = P(D_{x,y})$$

又

$$D_{x_1, y_2} \cap D_{x_2, y_1} = D_{x_1, y_1}$$

故

$$P(D_{x_1, y_2} \cup D_{x_2, y_1}) = P(D_{x_1, y_1}) + P(D_{x_2, y_1}) - P(D_{x_1, y_1}) \quad (3.2)$$

令

$$D = (x_1, x_2] \times (y_1, y_2]$$

则

$$D = D_{x_2, y_2} - (D_{x_1, y_2} \cup D_{x_2, y_1})$$

$$D_{x_1, y_2} \cup D_{x_2, y_1} \subset D_{x_2, y_2}$$

于是由 (3.2) 式有

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D_{x_2, y_2}) - P(D_{x_1, y_2} \cup D_{x_2, y_1}) \\ &= P(D_{x_2, y_2}) - P(D_{x_1, y_2}) - P(D_{x_2, y_1}) + P(D_{x_1, y_1}) \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

**定义 3** 定义在  $R^2$  上具有定理 1 中的性质 (1) — (4) 的函数  $F(x, y)$  称为二元定分布函数, 如果还有

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

则称  $F(x, y)$  为二元概率分布函数.

**定理 2** 设  $F(x, y)$  是二元定分布函数, 则在  $(R^2, \mathcal{B}_2)$  上存在唯一的测度  $P$ , 使得当  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$  时,

$$P((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) = \Delta F(x_1, y_1; x_2, y_2) \quad (3.4)$$

$P$  就称为  $F(x, y)$  所引出的勒贝格-斯提杰测度。

证明可仿照一维的情况给出 (参看习题 2 与 3)。

由 (3.3) 式知,  $(R^2, \mathcal{B}_2)$  上的任何有限测度  $P$  的分布函数所引出的测度就是  $P$  本身。

**推论** 设  $F(x, y)$  是定分布函数, 则  $F(x, y)$  就是它所引出的勒贝格-斯提杰测度  $P$  的分布函数。

**证** 根据测度的下连续性及  $F(x, y)$  的性质 (2) 和 (3.4) 式即得

$$\begin{aligned} & P((-\infty, x_2] \times (-\infty, y_2]) \\ &= \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty}} P((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) \\ &= \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty}} \Delta F(x_1, y_1; x_2, y_2) = F(x_2, y_2) \end{aligned}$$

**引理 1** 设  $F_1(x), F_2(y)$  是一维定分布函数, 则

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

是二维定分布函数, 且当  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$  时,

$$\Delta F(x_1, y_1; x_2, y_2) = [F_1(x_2) - F_1(x_1)][F_2(y_2) - F_2(y_1)] \quad (3.5)$$

**证** 由分解因式即得

$$\begin{aligned} \Delta F(x_1, y_1; x_2, y_2) &= F_1(x_1)F_2(y_2) - F_1(x_1)F_2(y_1) \\ &\quad - F_1(x_2)F_2(y_2) + F_1(x_2)F_2(y_1) \\ &= [F_1(x_2) - F_1(x_1)][F_2(y_2) - F_2(y_1)] \end{aligned}$$

**定理 3** 设  $F(x, y)$  如引理 1 所给,  $P_1, P_2$  分别为由  $F_1(x), F_2(y)$  所引出的一维勒贝格-斯提杰测度,  $P$  为由  $F(x, y)$  引出的二维勒贝格-斯提杰测度, 则

$$P = P_1 \times P_2$$

**证** 由乘积测度与一维勒贝格-斯提杰测度的定义及 (3.5)



式有

$$P_1 \times P_2((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) = \Delta F(x_1, y_1; x_2, y_2)$$

根据定理 2,  $(R^2, \mathcal{B}_2)$  上满足条件 (3.4) 的测度  $P$  是唯一的, 故在  $\mathcal{B}_2$  上的测度  $P$  与  $P_1 \times P_2$  恒等.

**定义 4** 设  $f_1(\omega)$  与  $f_2(\omega)$  是定义在同一可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的两个实值可测函数, 则称

$$f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$$

构成一个二维可测向量. 特别是, 如果  $\xi_1(\omega)$  与  $\xi_2(\omega)$  是同一概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的两个随机变量, 则二维可测向量

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$$

也称为二维随机变量.

**引理 2** 设  $f_1(\omega)$  与  $f_2(\omega)$  是定义在同一可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的实值函数, 则

$$f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$$

是一个二维可测向量的充要条件是对任何  $A \in \mathcal{B}_2$  有

$$\{\omega \mid f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \quad (3.6)$$

**证** 充分性: 设  $x$  是任意实数, 令

$$A = (-\infty, x] \times R$$

则

$$\begin{aligned} \{\omega \mid f(\omega) \in A\} &= \{\omega \mid f_1(\omega) \in (-\infty, x], f_2(\omega) \in R\} \\ &= \{\omega \mid f_1(\omega) \leq x\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

由于  $A \in \mathcal{B}_2$ , 故由 (3.6) 与 (3.7) 有

$$\{\omega \mid f_1(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

即  $f_1(\omega)$  可测. 同理可证  $f_2(\omega)$  可测.

**必要性:** 设  $\mathcal{A}$  是  $R^2$  中一切使 (3.6) 式成立的集  $A$  所构成的类. 仿照一维的情况可证  $\mathcal{A}$  是一个  $\sigma$ -代数. 令

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, a] \times (-\infty, b] \mid a, b \in R\},$$

由可测向量的定义知  $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ , 从而

$$\mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{G}) \in \mathcal{A}$$

这就证得(3.6)式对一切二维波莱尔集  $A$  成立.

**引理 3** 设  $f(\omega)$  是测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的二维可测向量, 对于每个  $B \in \mathcal{B}_2$ , 令

$$\mu(B) = P(f^{-1}(B)) \quad (3.8)$$

则  $\mu$  是  $\mathcal{B}_2$  上的测度.

证明与 § 4.4 的引理 1 类似, 此处从略.

**定义 5** 设

$$f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$$

是测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的可测向量, 则称由 (3.8) 定义的  $\mathcal{B}_2$  上的测度  $\mu$  为  $f(\omega)$  所引出的测度,  $(R^2, \mathcal{B}_2, \mu)$  则称为由  $f(\omega)$  引出的测度空间.

如果  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为有限测度空间, 则称

$$F(x, y) = P(f_1(\omega) \leq x, f_2(\omega) \leq y)$$

为  $f(\omega)$  的分布函数, 显然  $f(\omega)$  的分布函数与  $\mathcal{B}_2$  上由  $f$  引出的测度  $\mu$  的分布函数一致, 即

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(f(\omega) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]) \\ &= P(f^{-1}((-\infty, x] \times (-\infty, y])) \\ &= \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \end{aligned}$$

**引理 4** 设  $f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$  是可测空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的可测向量,  $g(x, y)$  是二元波莱尔函数, 则  $g(f_1(\omega), f_2(\omega))$  是  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的可测函数.

**证** 设  $B \in \mathcal{B}_1$ , 由于  $g$  是二元波莱尔可测函数, 故

$$g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_2$$

于是由引理 2

$$\{\omega \mid g(f_1(\omega), f_2(\omega)) \in B\} = \{\omega \mid f(\omega) \in g^{-1}(B)\} \in \mathcal{F} \text{ 故}$$

$g(f_1(\omega), f_2(\omega))$  对  $\mathcal{F}$  可测.

下面我们给出二维形式的积分转换定理, 这个定理在概率论中起着重要作用.

**定理 4** 设

$$f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$$

是有限测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的二维随机向量,  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \mu)$  是  $f(\omega)$  引入的测度空间,  $F(x, y)$  是  $f(\omega)$  的分布函数,  $g(x, y)$  是二元波莱尔可测函数, 如果积分  $\int_{\Omega} g(f_1(\omega), f_2(\omega)) dP$  和  $(L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dF(x, y)$  中有一个存在, 则另一个也存在, 且

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g(f_1(\omega), f_2(\omega)) dP \\ &= (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dF(x, y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

证明可仿照一维情况 (§ 4.4 定理 2) 给出.

**推论**  $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的二维随机变量,  $F(x, y)$  是其分布函数, 则

$$\begin{aligned} E\xi_1(\omega) &= (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x, y) \\ E\xi_2(\omega) &= (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y dF(x, y) \end{aligned}$$

**证** 分别取  $g(x, y)$  为  $x$  或  $y$  即得.

**定义 5** 设  $f_1(\omega)$  与  $f_2(\omega)$  是同一测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的实值可测函数, 如果对于任意实数  $x, y$ , 有

$$\begin{aligned} & P(f_1(\omega) \leq x, f_2(\omega) \leq y) \\ &= P(f_1(\omega) \leq x) P(f_2(\omega) \leq y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

则称  $f_1(\omega)$  与  $f_2(\omega)$  相互独立.

独立性是概率论中最重要的概念之一.

显然 (3.10) 式可写为

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \quad (3.11)$$

其中 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为 $f_1(\omega)$ 与 $f_2(\omega)$ 的分布函数,  $F(x, y)$ 为二维随机向量 $(f_1(\omega), f_2(\omega))$ 的分布函数.

**定理 5** 设 $f_1(\omega)$ 与 $f_2(\omega)$ 是测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实值可测函数, 则它们相独立的充要条件是对一切一维波莱尔集 $B_1$ 与 $B_2$ 有

$$\begin{aligned} P(f_1(\omega) \in B_1, f_2(\omega) \in B_2) \\ = P(f_1(\omega) \in B_1)P(f_2(\omega) \in B_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

只证必要性. 设 $f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$ 引出的测度为 $\mu$ . 如上所述,  $\mu$ 也是由 $f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$ 的分布函数

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

所引出的测度, 根据定理 3,

$$\mu = P_1 \times P_2$$

其中 $P_1$ 与 $P_2$ 分别为由 $f_1(\omega)$ 与 $f_2(\omega)$ 所引出的一维勒贝格-斯提杰测度, 于是对于任意的 $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ,  $B_2 \in \mathcal{B}_1$ 有

$$\begin{aligned} P(f_1(\omega) \in B_1, f_2(\omega) \in B_2) &= P(f(\omega) \in B_1 \times B_2) \\ &= \mu(B_1 \times B_2) \\ &= P_1 \times P_2(B_1 \times B_2) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2) \\ &= P(f_1(\omega) \in B_1)P(f_2(\omega) \in B_2) \end{aligned}$$

即(3.12)成立.

**定理 6** 设 $f_1(\omega)$ 与 $f_2(\omega)$ 是相互独立的可测函数,  $g_1$ 与 $g_2$ 是任意一元波莱尔可测函数, 则 $g_1(f_1(\omega))$ 与 $g_2(f_2(\omega))$ 也相互独立.

**证** 对任意的一维波莱尔集 $B_1$ 与 $B_2$ , 由定理 5 及 § 3.2 定理 1 有

$$P(g_1(f_1) \in B_1, g_2(f_2) \in B_2)$$

$$\begin{aligned}
&= P(f_1 \in g_1^{-1}(B_1), f_2 \in g_2^{-1}(B_2)) \\
&= P(f_1 \in g_1^{-1}(B_1))P(f_2 \in g_2^{-1}(B_2)) \\
&= P(g_1(f_1) \in B_1)P(g_2(f_2) \in B_2)
\end{aligned}$$

**定理 7** 设  $f_1(\omega)$  与  $f_2(\omega)$  是有限测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上相互独立的可积函数, 则

$$\int_{\Omega} f_1 f_2 dP = \int_{\Omega} f_1 dP \cdot \int_{\Omega} f_2 dP$$

**证** 设  $f_1, f_2$  和  $(f_1, f_2)$  所引入的测度分别是  $P_1, P_2$  和  $\mu$ , 则

$$\mu = P_1 \times P_2$$

于是定理 4 及富比尼定理有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f_1 f_2 dP &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy dP_1 \times P_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x dP_1 \int_{-\infty}^{+\infty} y dP_2 = \int_{\Omega} f_1 dP \cdot \int_{\Omega} f_2 dP
\end{aligned}$$

**推论** 设  $\xi_1(\omega)$  与  $\xi_2(\omega)$  是相互独立且具有有限数学期望的随机变量, 则

$$E\xi_1\xi_2 = (E\xi_1)(E\xi_2)$$

在普通的概率论中用来定义随机变量的数字特征的积分是黎曼型的斯提杰积分, 下面我们来给出它的定义并讨论它和勒贝格-斯提杰积分的关系.

**定义 6** 设  $F(x, y)$  是二元定分布函数,  $f(x, y)$  是定义在  $R^2$  上的实值函数. 在区间  $[a, b]$  与  $[c, d]$  任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

来划分矩形  $[a, b] \times [c, d]$ , 记这一分法为  $\Delta$ , 在每个区间  $[x_{k-1}, x_k]$  与  $[y_{j-1}, y_j]$  中分别任取一点  $x_k^*$  和  $y_j^*$ , 作和

$$\sigma = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta F(x_{i-1}, x_i; y_{j-1}, y_j)$$

令

$$\lambda(\Delta) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \{ (x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1}) \}$$

如果当 $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$ 时, 不论分法如何, 也不论 $x_i^*$ 和 $y_j^*$ 的取法如何,  $\sigma$ 有有限的极限 $I$ , 则称这个极限 $I$ 为 $f(x, y)$ 在矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上关于 $F(x, y)$ 的黎曼-斯提杰积分(简称R-S积分), 记为

$$\begin{aligned} (R-S) \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} f(x, y) dF(x, y) &= \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sigma \\ &= \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta F(x_{i-1}, x_i; y_{j-1}, y_j) \end{aligned}$$

定义7 设 $F(x, y)$ 是二元定分布函数,  $f(x, y)$ 是 $R^2$ 上的实值函数, 如果对于任何 $[a, b], [c, d]$ , 积分

$$(R-S) \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} f(x, y) dF(x, y)$$

存在, 且极限

$$\lim_{\substack{b, d \rightarrow +\infty \\ a, c \rightarrow -\infty}} (R-S) \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} f(x, y) dF(x, y) = I$$

存在, 则称此极限为 $f(x, y)$ 关于 $F(x, y)$ 在 $R^2$ 上的广义黎曼-斯提杰积分, 记为

$$I = (R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dF(x, y) \quad (3.13)$$

如果 $I$ 有限, 则称积分(3.13)收敛.

如果

$$(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dF(x, y) < \infty$$

则称积分(3.13)绝对收敛

仿照广义黎曼积分的情况可以证明, 如果积分(3.13)绝



对收敛, 则它也收敛.

**定理 8** 设  $F(x, y)$  是二元定分布函数,  $f(x, y)$  是  $R^2$  上的连续函数, 则在  $R^2$  上  $f(x, y)$  关于  $F(x, y)$  勒贝格-斯提杰可积的充要条件是积分  $(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dF(x, y)$  绝对收敛, 且在此条件满足时, 有

$$\begin{aligned} & (L-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dF(x, y) \\ &= (R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dF(x, y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

**定理 9** 设  $F(x, y)$  是二元定分布函数, 它在  $[a, b] \times [c, d]$  上具有连续偏导数  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ , 且  $f(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 则

$$\begin{aligned} & (R-S) \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} f(x, y) dF(x, y) \\ &= \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} f(x, y) \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy \end{aligned}$$

上式的右边的积分是普通的二重积分.

**定理 10** 设  $F(x, y)$  是二元定分布函数, 它在  $R^2$  上具有连续的偏导数  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ , 且  $f(x, y)$  在  $R^2$  上连续, 如广

义二重积分  $(R) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy$  收敛, 则

$$(R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dF(x, y)$$

也收敛, 且

$$\begin{aligned} & (R-S) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dF(x, y) \\ &= (R) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy \end{aligned}$$

以上三个定理的证明是纯分析性的。此处从略。

### 习 题 5.3

1. 二元定分布函数的诸定义性质并不独立，哪些性质可由其余的性质推出？

2. 设  $\mathcal{A}$  是二维有限左、下开区间的全体，即

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \times (c, d] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$F(x, y)$  是二元定分布函数。证明

(1)  $\mathcal{A}$  对交运算封闭；

(2)  $\mathcal{A}$  上的集函数；

$$P((a, b] \times (c, d]) = \Delta F(a, b; c, d)$$

具有可列可加性；

(3) 设  $\mathcal{F}$  是由  $\mathcal{A}$  中有限个互不相交的集的和集的全体所组成的类，则  $\mathcal{F}$  是一个环；

(4) 设

$$A = \sum_{k=1}^n (a_k, b_k] \times (c_k, d_k]$$

令

$$P(A) = \sum_{k=1}^n \Delta F(a_k, b_k; c_k, d_k]$$

则  $P(A)$  是  $\mathcal{F}$  上的测度。

3. 证明定理 2。

4.  $P$  是  $\mathcal{B}_2$  上的有限测度，令

$$F(x, y) = P([x, +\infty) \times [y, +\infty))$$

讨论  $F(x, y)$  的性质。

5. 在定理 7 的条件下，证明  $f_1 f_2$  是  $\Omega$  上的可积函数。

6. 证明引理 3。

7. 完成定理 8—10 的证明。

## 第六章 广义测度

### § 6.1 广义测度的哈恩 (Hahn) 分解和若当 (Jordan) 分解

**定义 1** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $\mu$  是定义在  $\mathcal{F}$  上的广义实值集函数, 如果  $\mu$  满足如下条件:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (2) 除有限值外,  $\mu$  在  $\pm\infty$  二值中至多只能取得一个值;
- (3) 具有可列可加性: 当  $\{A_n\}$  是  $\mathcal{F}$  中一系列不相交的集时, 有

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

则称  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的一个广义测度.

把  $(\Omega, \mathcal{F})$  与其上的广义测度  $\mu$  合并一起来考虑, 则称它为广义测度空间. 记为  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

如果对于任何  $A \in \mathcal{F}$  有

$$|\mu(A)| < +\infty$$

则称  $\mu$  是有限的, 这时也称  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  是有限广义测度空间.

如果对于任何  $A \in \mathcal{F}$ , 存在  $A_n \in \mathcal{F}$ , 使得

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 且 } |\mu(A_n)| < +\infty (n=1, 2, 3, \dots)$$

则称  $\mu$  是  $\sigma$ -有限的. 这时也称  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  是  $\sigma$ -有限广义测度空间.

例 1 设  $P_1$  与  $P_2$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的两个测度, 其中至少有一个是有限测度, 则

$$\mu(A) = P_1(A) - P_2(A), A \in \mathcal{F}$$

是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度.

例 2 若  $f$  是  $\sigma$ -有限测度空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的可积函数, 则

$$\mu(A) = \int_A f dP, A \in \mathcal{F}$$

是有限广义测度. 集函数  $\mu(A)$  也称为  $f$  的不定积分.

以上两例的证明可直接由测度的定义和积分的性质得到.

读者不难验证, 测度的基本性质除单调性及次可列可加性外, 其余对广义测度也成立, 因为它们的证明并未用到测度的非负性条件.

广义测度还具有以下性质:

定理 1 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度, 如果  $A, B \in \mathcal{F}$ , 且  $A \subset B$ ,  $|\mu(B)| < +\infty$ , 则  $|\mu(A)| < +\infty$ .

证 根据  $\mu$  的有限可加性有

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

因为  $|\mu(B)| < +\infty$ , 故必须有  $|\mu(A)| < +\infty$ .

定理 2 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度, 如果  $\{A_n\}$  是  $\mathcal{F}$

中一系列互不相交的集, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < +\infty$$

证 令

$$A_n^+ = \begin{cases} A_n, & \text{当 } \mu(A_n) \geq 0 \\ \phi, & \text{当 } \mu(A_n) < 0 \end{cases}$$

$$A_n^- = \begin{cases} \phi, & \text{当 } \mu(A_n) \geq 0 \\ A_n, & \text{当 } \mu(A_n) < 0 \end{cases}$$

则

$$A_n = A_n^+ + A_n^- \quad (1.1)$$

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^+\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^+) \quad (1.2)$$

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^-) \quad (1.3)$$

根据广义测度的定义，在  $\pm\infty$  二值中， $\mu$  至多只能取得其中一个值。为确定起见，不妨设  $\mu$  不取  $-\infty$  值。于是

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^-\right) > -\infty$$

又由于  $\mu(A_n^-) \leq 0$ ，故(1.3)收敛。由假设及(1.1)，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n^+) + \mu(A_n^-)] \quad (1.4)$$

收敛。由(1.4)减去(1.3)即得(1.2)收敛。易知

$$|\mu(A_n)| = \mu(A_n^+) - \mu(A_n^-)$$

故由(1.2)与(1.3)的收敛性即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^+) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^-) < +\infty$$

**定义 2** 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度， $A \in \mathcal{F}$ 。如果当  $E \in \mathcal{F}$  且  $E \subset A$  时总有  $\mu(E) \geq 0$ ，则称  $A$  是正集（对  $\mu$  而言）；如果当  $E \in \mathcal{F}$  且  $E \subset A$  时总有  $\mu(E) \leq 0$ ，则称  $A$  是负集（对  $\mu$  而言）。

显然  $\phi$  既是正集又是负集，而且全体正集类与全体负集类都是  $\sigma$ -环。

**定理 3** 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的一个广义测度, 则存在两个不相交的可测集  $A$  和  $B$ , 使得

$$A + B = \Omega$$

且  $A$  对于  $\mu$  为正集,  $B$  对于  $\mu$  为负集.

我们称集  $A$  和  $B$  形成  $\Omega$  对  $\mu$  的一个哈恩分解.

**证** 因为  $\mu$  在  $+\infty$  与  $-\infty$  二值中至多只能取得一个值, 所以为确定起见, 我们可以假定, 对于任何  $E \in \mathcal{F}$ ,

$$-\infty < \mu(E) \leq +\infty \quad (1.5)$$

令

$$\beta = \inf\{\mu(B) \mid B \text{ 是 } \mu \text{ 的负集}\} \quad (1.6)$$

则存在负集  $B_n \in \mathcal{F}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \beta \quad (1.7)$$

令  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ , 则  $B$  是一个负集. 由 (1.6) 知,  $\beta \leq \mu(B)$ , 另

一方面, 因为  $B$  是负集, 故  $\mu(B - B_n) \leq 0$ , 所以

$$\mu(B) = \mu(B_n) + \mu(B - B_n) \leq \mu(B_n)$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由 (1.7) 知  $\mu(B) \leq \beta$ . 从而  $\mu(B) = \beta$  (即负集的  $\mu$  值可以达到最小).

现在我们证明  $A = \Omega - B$  是一个正集, 假定结论不成立, 设  $E_0$  是  $A$  的一个可测子集使得  $\mu(E_0) < 0$ . 首先可以看出  $E_0$  不可能是负集, 因为如果  $E_0$  是负集, 则  $B + E_0$  也将是负集, 且

$$\mu(B + E_0) = \mu(B) + \mu(E_0) < \mu(B) = \beta$$

这与 (1.6) 矛盾. 于是  $E_0$  存在  $\mu$  值为正的可测子集. 令

$$k_1 = \min\left\{n \mid \text{存在可测集 } E \subset E_0, \text{ 使 } \mu(E) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

并设  $E_1$  是  $E_0$  的可测子集, 使得  $\mu(E_1) \geq \frac{1}{k_1}$ . 因为  $\mu(E_0) < 0$ , 所以由 (1.5) 及定理 1 知,  $\mu(E_0)$  和  $\mu(E_1)$  都是有限的. 因为

$$\mu(E_0 - E_1) = \mu(E_0) - \mu(E_1) \leq \mu(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0$$



故刚用于  $E_0$  的论证也可以同样用之于  $E_0 - E_1$ , 即令

$$k_2 = \min \left\{ n \mid \text{存在可测集 } E \subset E_0 - E_1, \text{ 使得 } \mu(E) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

并设  $E_2$  是  $E_0 - E_1$  的可测子集, 使得  $\mu(E_2) \geq \frac{1}{k_2}$ , 则有

$$\mu(E_0 - E_1 - E_2) = \mu(E_0) - \mu(E_1) - \mu(E_2) \leq \mu(E_0)$$

$$-\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} < 0$$

依此类推, 以至无穷. 令

$$F_0 = E_0 - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

由于  $\mu(F_0)$  有限, 且

$$\mu(F_0) = \mu(E_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \quad (1.8)$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$  收敛, 因而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} = 0$$

由此可知  $F_0$  不可能存在  $\mu$  值为正的可测子集, 即如果  $F$  是  $F_0$  的任意子集, 则有  $\mu(F) \leq 0$ . 这也就是说,  $F_0$  是一个负集, 因而  $B + F_0$  也是负集. 但  $F_0$  和  $B$  不相交, 且由 (1.8) 有

$$\mu(F_0) \leq \mu(E_0) < 0$$

于是

$$\mu(B + F_0) = \mu(B) + \mu(F_0) < \mu(B) = \beta$$

这与  $\mu(B)$  的最小性质矛盾.

**引理 1** 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,

$$\Omega = A_1 + B_1 \text{ 和 } \Omega = A_2 + B_2$$

是  $\Omega$  的两个哈恩分解, 则对每个可测集  $E$ , 有

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap A_2)$$

$$\mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B_2)$$

证 由关系式

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset E \cap A_1$$

可知

$$\mu(E \cap (A_1 - A_2)) \geq 0$$

又由关系式

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset E \cap B_2$$

可知

$$\mu(E \cap (A_1 - A_2)) \leq 0$$

因此有

$$\mu(E \cap (A_1 - A_2)) = 0 \quad (1.9)$$

同理有

$$\mu(E \cap (A_2 - A_1)) = 0 \quad (1.10)$$

由于

$$A_1 \cup A_2 = A_1 + (A_2 - A_1) = A_2 + (A_1 - A_2)$$

故由 (1.9) 与 (1.10) 有

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu(E \cap A_2)$$

同理有  $\mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B_2)$ .

**定义 3** 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,  $\Omega = A + B$  是  $\Omega$  的哈恩分解. 对于每个  $E \in \mathcal{F}$ , 令

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &= \mu(E \cap A) \\ \mu^-(E) &= -\mu(E \cap B) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E) \quad (1.12)$$

集函数  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  和  $|\mu|$  分别称为  $\mu$  的上变差, 下变差和全变差.

引理 1 表明, 尽管  $\Omega$  的哈恩分解未必唯一, 但由 (1.11) 与 (1.12) 定义的  $\mu$  的变差是唯一确定的.

显然, 如果  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的测度, 则  $\Omega = \Omega + \phi$  是  $\Omega$  的哈恩分解, 这时有

$$\mu^- = 0, \mu^+ = |\mu| = \mu$$

容易证明, 本节例 2 所述有限广义测度  $\mu$  的上、下变差及全变差分别为

$$\mu^+(E) = \int_E f^+ dp$$

$$\mu^-(E) = \int_E f^- dp$$

$$|\mu|(E) = \int_E |f| dp$$

**定理 4** 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度, 则

(1)  $\mu$  的上变差  $\mu^+$ 、下变差  $\mu^-$  和全变差  $|\mu|$  都是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的测度, 且

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E), E \in \mathcal{F} \quad (1.13)$$

(2) 如果  $\mu$  有限, 则  $\mu^+$  和  $\mu^-$  也有限; 如果  $\mu$  为  $\sigma$ -有限, 则  $\mu^+$  与  $\mu^-$  也  $\sigma$ -有限.

(3)  $\mu^+$  和  $\mu^-$  中至少有一个是有限测度.

证 (1) 是显然的.

(2) 设  $\mu$  有限,  $E \in \mathcal{F}$ , 则根据定理 1 知,

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \text{ 和 } \mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$$

也都有限. 由此命题的第二部分可用通常的方法推出.

(3) 因为  $\mu$  在  $+\infty$  和  $-\infty$  二值中至多只能取得一个值, 由此可见  $\mu^+$  与  $\mu^-$  中至少有一个恒为有限.

定理 4 表明, 每个广义测度可以表为两个测度 (其中至少有一个是有限的) 之差, (1.13) 将  $\mu$  表为它的上变差与下变差之差, 这种表示方法称为  $\mu$  的若当分解.

## 习 题 6.1

1. 如果广义测度的定义中去掉条件 (2), 将会出现什么问题?

2. 设  $\mu$  是可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度。对于任何不相交的可测集的序列  $\{A_n\}$ , 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

的和总具有确定的意义, 也就是说, 这个级数或者是收敛的, 或者发散到  $+\infty$  或  $-\infty$ 。

3. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,  $\{A_n\}$  是  $\mathcal{F}$  中互不相交的可测集, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$$

则对于  $\{A_n\}$  任意重排后所得的集列  $\{B_n\}$  都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = +\infty$$

4. 设  $P_1$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的  $\sigma$ -有限测度,  $P_2$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的有限测度, 则广义测度

$$\mu(A) = P_1(A) - P_2(A), \quad A \in \mathcal{F}$$

是  $\sigma$ -有限的。

5. 两个  $\sigma$ -有界测度之和是  $\sigma$ -有限测度, 这个命题对无限项和的场合是否成立?

6. 如果广义测度  $\mu$  可以按两种方式表为两个测度之差:

$$\mu = P_1 - P_2, \quad \mu = \widetilde{P}_1 - \widetilde{P}_2$$

是否一定有  $P_1 = \widetilde{P}_1$  和  $P_2 = \widetilde{P}_2$ ?

7. 证明全体正集与全体负集类都是  $\sigma$ -环。

8. 构造一个例子说明哈恩分解不是唯一的。

9. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,  $E \in \mathcal{F}$ , 则

$$\mu^+(E) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F} \text{ 且 } F \subset E\}$$

$$\mu^-(E) = -\inf\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F} \text{ 且 } F \subset E\}$$

10. 设  $N$  是正整数的全体, 对于任何序列  $\{a_n\}$  和任何  $E \subset N$ , 令  $\mu(E)$  表示  $\{a_n\}$  中的对应项的和 (如果它存在), 即

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n$$

什么样的序列对应于  $N$  上的广义测度? 证明如果  $\{a_n\}$  是这样的序列且对于每个  $n$ ,  $|a_n| > 0$ , 则  $N$  相对于  $\mu$  的哈恩分解是唯一的.

11. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,  $E_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 且  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

12. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,  $E_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , 且  $|\mu(E_1)| < \infty$ , 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

13. 证明: 如果  $\mu$  是有限广义测度, 则

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(\mu + |\mu|)$$

$$\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

14. 证明若当分解在如下的意义下是最小的: 如果  $\mu$  是一个广义测度, 且  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ , 此处  $\mu_1$  与  $\mu_2$  是测度, 则  $|\mu| \leq \mu_1 + \mu_2$ , 且仅当  $\mu_1 = \mu^+$ ,  $\mu_2 = \mu^-$  时等号成立.

15. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度, 证明存在  $A, B \in \mathcal{F}$  使得

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}\},$$

$$\mu(B) = \inf\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$$

## § 6.2 拉东-尼古丁 (Radon-Nikodym) 定理及其应用

**定义 1** 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是一个可测空间,  $\mu$  和  $\nu$  是  $\mathcal{F}$  上的广

义测度，如果对于每个可测集 $E$ ，当 $|\mu|(E)=0$ 时，有 $\gamma(E)=0$ ，则称 $\gamma$ 对于 $\mu$ 绝对连续，记为 $\gamma \ll \mu$ 。

根据积分的性质可知，上节例2中定义的集函数（可积函数的不定积分） $\mu(A)$ 对于测度 $P$ 是绝对连续的。

**定理1** 设 $\mu$ 和 $\gamma$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的广义测度，则条件

- (1)  $\gamma \ll \mu$ ;
- (2)  $\gamma^+ \ll \mu$ 且 $\gamma^- \ll \mu$ ;
- (3)  $|\gamma| \ll |\mu|$ 。

相互等价。

**证** 设(1)成立，则当 $|\mu|(E)=0$ 时有 $\gamma(E)=0$ ，令 $\Omega = A + B$ 为 $\Omega$ 对 $\gamma$ 的一个哈恩分解，则当 $|\mu|(E)=0$ 时有

$$0 \leq |\mu|(E \cap A) \leq |\mu|(E) = 0$$

和

$$0 \leq |\mu|(E \cap B) \leq |\mu|(E) = 0$$

由此有

$$|\mu|(E \cap A) = |\mu|(E \cap B) = 0$$

由此有

$$\gamma^+(E) = \gamma(E \cap A) = 0$$

和

$$\gamma^-(E) = \gamma(E \cap B) = 0$$

于是(2)成立。

由关系式

$$|\gamma|(E) = \gamma^+(E) + \gamma^-(E)$$

知，由(2)可推出(3)；又由关系式

$$0 \leq |\gamma(E)| \leq |\gamma|(E)$$

知，由(3)可推出(1)。

**定理2** 设 $\mu$ 和 $\gamma$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的广义测度，其中 $\nu$ 为有



限, 且  $\gamma \ll \mu$ , 则对于每个正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\delta$ , 使得  $E \in \mathcal{S}$  且  $|\mu|(E) < \delta$  时, 有  $|\gamma|(E) < \varepsilon$ .

证 用反证法, 假定结论不成立, 则存在  $\varepsilon > 0$  及  $E_n \in \mathcal{S}$ , 使得

$$|\mu|(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ 且 } |\gamma|(E_n) \geq \varepsilon, n = 1, 2, \dots$$

令 
$$E = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$$

则对于任何  $n$  有

$$|\mu|(E) \leq |\mu|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\mu|(E_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

因而有  $|\mu|(E) = 0$ , 另一方面, 由于  $\gamma$  有限, 故有

$$|\gamma|(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\gamma|(E_n) \geq \varepsilon$$

这与假设条件  $\gamma \ll \mu$  矛盾.

现在我们给出用积分表示广义测度的一个重要定理, 为此先来证明如下的引理.

引理 1 设  $n$  是正整数,  $E$  是可测集,  $f_k (k = 1, 2, \dots, n)$  是  $E$  上的可测函数, 令

$$g_n = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

则可将  $E$  分解为不相交的可测集  $E_k (k = 1, 2, \dots, n)$  之和:

$$E = \sum_{k=1}^n E_k$$

使得在  $E_k$  上  $g_n = f_k (k = 1, 2, \dots, n)$ .

证 用归纳法. 设  $n = 2$ , 并令

$$E_1 = \{\omega \mid \omega \in E, f_1(\omega) \geq f_2(\omega)\}, E_2 = E - E_1,$$

则  $E = E_1 + E_2$  具有所要求的性质, 设分解对  $n$  是可能的, 令

$$g_{n+1} = \max(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) = \max(g_n, f_{n+1}) \quad \text{于是}$$

$E = A_n + E_{n+1}$ , 此处  $E_{n+1}$  上  $g_{n+1} = f_{n+1}$ , 在  $A_n$  上  $g_{n+1} = g_n$ .

由归纳法假设有  $A_n = \sum_{k=1}^n E_k$  且  $g_{n+1}(\omega) = g_n(\omega) = f_k(\omega), \omega \in$

$E_k (k=1, 2, \dots, n)$ , 于是  $E = \sum_{k=1}^{n+1} E_k$  是所要求的分解, 即命题对  $n+1$  成立.

**引理 2** 设  $\mu$  和  $\nu$  是  $\mathcal{F}$  上的两个有限测度,  $\nu \ll \mu$ , 且  $\nu$  不恒为零, 则存在正数  $\varepsilon$  和可测集  $A$ , 使得  $\mu(A) > 0$ , 并使得  $A$  对广义测度  $\nu - \varepsilon\mu$  为正集.

**证** 设  $\Omega = A_n + B_n (n=1, 2, \dots)$  是  $\Omega$  对广义测度  $\nu - \frac{1}{n}\mu$  的哈恩分解, 并令

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B_0 = A_0^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

由于  $B_0 \subset B_n$ , 故有  $(\nu - \frac{1}{n}\mu)(B_0) \leq 0$ , 即

$$0 \leq \nu(B_0) \leq \frac{1}{n}\mu(B_0), \quad n=1, 2, \dots$$

从而有  $\nu(B_0) = 0$ . 由于  $\nu$  不恒为零, 故  $\nu(A_0) > 0$ , 根据绝对连续性的假设条件有  $\mu(A_0) > 0$ . 由此知至少对于  $n$  的一个值有  $\mu(A_n) > 0$ ; 对于这个  $n$  值, 令  $A = A_n$  和  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , 即得引理的结论.

**定理 3 (拉东-尼古丁)** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  是一个  $\sigma$ -有限测度空间,  $\nu$  是  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限广义测度, 如果  $\nu \ll \mu$ , 则存在  $\Omega$  上的一个实值可测函数  $f$ , 使得对每个  $E \in \mathcal{F}$  有

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad (2.1)$$

且在  $\nu$  为测度的情况, 可取  $f$  为非负可测函数. 函数  $f$  在关于  $\mu$  对等的意义下是唯一确定的: 如果同时存在  $\Omega$  上的实值可测函

数  $g$ , 使得对每个  $E \in \mathcal{S}$  有

$$\gamma(E) = \int_E g d\mu$$

则  $f = g$  a.e.  $(\mu)$ .

(2.1) 式中的被积函数  $f$  通常称为广义测度  $\gamma$  关于测度  $\mu$  的拉东-尼古丁导数, 记为  $\frac{d\gamma}{d\mu}$ .

证 分以下几种情况逐步讨论:

(1)  $\mu$  与  $\gamma$  都是  $\mathcal{S}$  上的有限测度.

设  $\mathcal{N}$  是满足如下条件的非负可测函数  $f$  的全体: 对于每个  $E \in \mathcal{S}$  有

$$\int_E f d\mu \leq \gamma(E)$$

因为  $0 \in \mathcal{N}$ , 故  $\mathcal{N}$  非空. 令

$$\alpha = \sup \left\{ \int_{\Omega} f d\mu, f \in \mathcal{N} \right\}$$

则存在  $\mathcal{N}$  中的一个序列  $\{f_n\}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \alpha$$

令

$$g_n = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

于是由引理 1, 任意可测集  $E$  可分解为  $E = \sum_{k=1}^n E_k$ , 使得在  $E_k$  上  $g_n = f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). 因为每个  $f_k \in \mathcal{N}$ , 故

$$\int_E g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_k d\mu \leq \sum_{k=1}^n \gamma(E_k) = \gamma(E) \quad (2.2)$$

因为  $\{g_n\}$  单调增加, 故极限

$$f_0(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega)$$

存在, 于是由勒维定理及 (2.2) 有

$$\int_E f_0 d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \gamma(E)$$

故  $f_0 \in \mathcal{N}$ , 所以

$$\alpha \geq \int_{\Omega} f_0 d\mu \geq \int_{\Omega} g_n d\mu \geq \int_{\Omega} f_n d\mu$$

故  $\alpha = \int_{\Omega} f_0 d\mu$ . 因为

$$\int_{\Omega} f_0 d\mu \leq \gamma(\Omega) < +\infty$$

故存在实值非负可测函数  $f$ , 使得  $f \equiv f_0$ .

对于每个  $E \in \mathcal{F}$ , 令

$$\gamma_0(E) = \gamma(E) - \int_E f d\mu$$

根据  $f$  的构造,  $\gamma_0$  是  $\mathcal{F}$  上的有限测度, 易知  $\gamma_0 \ll \mu$ . 下面我们要证明  $\gamma_0$  恒等于零.

假定  $\gamma_0$  不恒等于零, 则根据引理 1, 存在正数  $\varepsilon$  和可测集  $A$ , 使得  $\mu(A) > 0$ , 且使得  $A$  对于广义测度  $\gamma_0 - \varepsilon\mu$  为正集. 于是对于每个  $E \in \mathcal{F}$  有

$$(\gamma_0 - \varepsilon\mu)(E \cap A) \geq 0$$

即

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leq \gamma_0(E \cap A) = \gamma(E \cap A) - \int_{E \cap A} f d\mu$$

令  $g = f + \varepsilon\chi_A$ , 则对于每个  $E \in \mathcal{F}$  有

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \int_E f d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leq \int_E f d\mu + \gamma(E \cap A) \\ &= \int_E f d\mu + \gamma(E \cap A) - \int_{E \cap A} f d\mu = \int_{E \cap A} f d\mu + \gamma(E \cap A) \leq \gamma(E) \end{aligned}$$

因此  $g \in \mathcal{N}$ . 但因

$$\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha$$

这与  $\alpha$  的定义矛盾，于是必须有  $\gamma_0 \equiv 0$ ，即 (2.1) 成立。

(2)  $\mu$  和  $\gamma$  都是  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限测度。

这时我们有

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty$$

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \gamma(B_n) < \infty$$

由此有

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_n \cap B_m) \quad (2.3)$$

于是我们就将  $\Omega$  表示为  $\mu$  和  $\gamma$  均有限的可列个互不相交的集之和，改变一下记号，(2.3) 也可写为

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n$$

其中  $\mu(\Omega_n) < \infty$ ,  $\gamma(\Omega_n) < \infty$ 。令

$$\mathcal{F}_n = \{E \cap \Omega_n \mid E \in \mathcal{F}\}$$

则  $\mathcal{F}_n$  是  $\Omega_n$  上的  $\sigma$ -代数。考虑限制在  $\mathcal{F}_n$  上的  $\mu$  和  $\gamma$ ，因为  $\mu$  和  $\gamma$  有限，于是由 (1) 知，存在  $\Omega_n$  上的非负实值可测函数  $f_n$ ，使得当  $E \in \mathcal{F}_n$  时，有

$$\gamma(E) = \int_E f_n d\mu \quad (2.4)$$

令

$$f(\omega) = f_n(\omega), \quad \omega \in \Omega_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

则  $f$  是  $\Omega$  上的非负实值可测函数，且对于任意的  $E \in \mathcal{F}$ ，由 (2.4) 有

$$\gamma(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(E \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap \Omega_n} f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

即 (2.1) 成立。

(3)  $\mu$  是  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限测度,  $\nu$  是  $\mathcal{F}$  上的  $\sigma$ -有限广义测度.

此时若当分解给出  $\nu = \nu^+ - \nu^-$ , 于是由 (2) 有

$$\nu^+(E) = \int_E f_1 d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f_2 d\mu,$$

此处  $f_1$  与  $f_2$  是非负实值可测函数, 其中至少有一个是可积的, 所以对一切  $E \in \mathcal{F}$  有

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E f d\mu$$

此处  $f = f_1 - f_2$  的积分是有定义的, 于是我们就证明了 (2.1).

最后我们来证明 (2.1) 中的  $f$  在关于  $\mu$  对等的意义下的唯一性.

设  $g$  是另一个实值可测函数, 使得对一切  $E \in \mathcal{F}$  有

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \tag{2.5}$$

令

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty \tag{2.6}$$

$$E_n = \{\omega \mid f(\omega) > g(\omega), \omega \in A_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则  $f$  与  $g$  在  $E_n$  上可积, 且由 (2.1) 与 (2.5) 有

$$\int_{E_n} (f - g) d\mu = 0$$

故  $\mu(E_n) = 0$ , 即在  $A_n$  上  $f \leq g a.e. [\mu]$ ; 类似地, 在  $A_n$  上有  $g \leq f a.e. [\mu]$ , 从而在  $A_n$  上有  $f = g a.e. [\mu]$ . 于是由 (2.6) 知, 在  $\Omega$  上  $f = g a.e. [\mu]$ .

拉东-尼古丁定理在概率论中有着重要的应用. 下面我们来举两个例子 (推论 1 与 2).



**推论 1** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一概率空间,  $\mathcal{F}_1$  是  $\Omega$  中的  $\sigma$ -代数, 且  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$  (即  $\mathcal{F}_1$  是  $\mathcal{F}$  的子  $\sigma$ -代数),  $A$  是一随机事件 (即是  $\mathcal{F}$ -可测集), 则存在定义在  $\Omega$  上的、满足如下条件的实值函数  $P(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$ :

(1)  $P(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$  对于  $\mathcal{F}_1$  可测 (因为  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ , 故此函数也对  $\mathcal{F}$  可测, 即是  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量);

(2) 对于任何  $B \in \mathcal{F}_1$  有

$$P(A \cap B) = \int_B P(A|\mathcal{F}_1) dP$$

且在关于  $P$  对等的意义下, 上述  $P(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$  是唯一确定的。

具有以上性质的函数  $P(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$  称为 (按杜勃 (Doob) 的定义)  $A$  关于  $\mathcal{F}_1$  的条件概率。

**证** 将  $P(A \cap B)$  看成是关于  $B$  的集函数, 则它是  $(\Omega, \mathcal{F}_1)$  上的有限测度, 由

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$

知,  $(\Omega, \mathcal{F}_1)$  上的测度  $P(A \cap B)$  关于  $(\Omega, \mathcal{F}_1)$  上的测度  $P(B)$  绝对连续, 故根据拉东-尼古丁定理知, 满足条件 (1) 与 (2) 的函数  $P(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$  存在, 且在关于  $P$  对等的意义下是唯一的。

**例** 设  $\{B_k\}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  中一列 (有限个或无限个互不相交的可测集, 且

$$\Omega = \sum_k B_k, \quad P(B_k) > 0$$

$\mathcal{F}_1$  是  $B_1, B_2, \dots$  中若干个 (零个, 有限个或无限个) 集之和集的全体。易知  $\mathcal{F}_1$  是  $\mathcal{F}$  的子  $\sigma$ -代数。对于  $A \in \mathcal{F}$ , 令

$$P(A|\mathcal{F}_1)(\omega) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)}, \quad \omega \in B_k, \quad k=1, 2, \dots$$

易验证, 上述  $P(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$  就是  $A$  关于  $\mathcal{F}_1$  的条件概率。

这个例子显示了杜勃意义下的条件概率和通常的条件概率的关系。

**推论 2** 设  $f(\omega)$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量。且

$$\int_{\Omega} |f| dP < +\infty$$

(即  $f$  具有有限的数学期望)。  $\mathcal{F}_1$  是  $\mathcal{F}$  的子  $\sigma$ -代数, 则存在定义在  $\Omega$  上的满足如下条件的实值函数  $E(f|\mathcal{F}_1)(\omega)$ :

(1)  $E(f|\mathcal{F}_1)(\omega)$  对  $\mathcal{F}_1$  可测;

(2) 对于任意的  $A \in \mathcal{F}_1$ ,

$$\int_A f dP = \int_A E(f|\mathcal{F}_1) dP$$

且在关于  $P$  对等的意义下, 上述  $E(f|\mathcal{F}_1)$  是唯一确定的。

具有以上性质的函数  $E(f|\mathcal{F}_1)(\omega)$  称为  $f(\omega)$  关于  $\mathcal{F}_1$  的条件数学期望。

**证** 和引理 1 类似, 由于  $\int_A f dP (A \in \mathcal{F}_1)$  是  $(\Omega, \mathcal{F}_1)$  上的一个有限测度, 且它关于  $P$  (作为限制在  $\mathcal{F}_1$  上的测度) 绝对连续, 故根据拉东-尼古丁定理, 满足上述条件的  $E(f|\mathcal{F}_1)$  存在且在关于  $P$  对等的意义下是唯一的。

## 习 题 6.2

1. 设  $\mu$  是一个广义测度,  $E$  是一个可测集, 则  $|\mu|(E) = 0$  的充要条件是: 对于  $E$  的每个可测子集  $F$ ,  $\mu(F) = 0$ 。

2. 设  $\mu$  和  $\nu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的两个测度, 则  $\mu \ll \mu + \nu$ 。

3. 给出一个例子说明广义测度绝对连续性定义中的条件  $|\mu|(E) = 0$  不等价于  $\mu(E) = 0$ 。

4. 如果没有  $\nu$  有限的条件, 定理 2 的结论是否成立?

5. 设  $\mu$  和  $\nu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度, 如果对于每个正数  $\varepsilon$ , 都存在相应的正数  $\delta$ , 使得当  $E \in \mathcal{F}$  且  $|\mu|(E) < \delta$  时有  $|\nu|(E) < \varepsilon$ , 则  $\nu \ll \mu$ 。

6. 证明拉东-尼古丁定理中  $\mu$  为  $\sigma$ -有限的条件是不可少的。

7. 设  $f$  是非负可测函数, 且在具有正  $\mu$ -测度的集上为  $\infty$ , 令

$$\gamma(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{F}$$

证明  $\gamma$  不具有  $\sigma$ -有限的性质.

8. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的  $\sigma$ -有限广义测度,  $f$  是  $\mathcal{F}$ -可测函数, 如果  $f$  对  $|\mu|$  可积, 则也对  $\mu^+$  和  $\mu^-$  可积.

9. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度,  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  是  $\mu$  的若当分解,  $f$  是  $\mathcal{F}$ -可测函数, 如果  $f$  关于  $\mu^+$  与  $\mu^-$  都可积, 则定义

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu^+ - \int_E f d\mu^-, \quad E \in \mathcal{F}$$

$\int_E f d\mu$  称为  $f$  在  $E$  上关于广义测度  $\mu$  的积分. 证明

(1)  $(\Omega, \mathcal{F})$  上任何有界可测函数关于  $\mu$  总是可积的;

(2) 设  $f, g$  关于  $\mu$  可积,  $\alpha$  和  $\beta$  是两个任意实数, 则  $\alpha f + \beta g$  关于  $\mu$  也是可积的, 而且

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

(3) 如果  $f, g$  关于  $\mu_1$  和  $\mu_2$  都几乎处处相等. 则

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

(4) 如果  $\{E_n\}$  是一列互不相交的可测集, 则  $f$  在  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$  上关于  $\mu$

可积的充要条件是

1°.  $f$  在  $E_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 上关于  $\mu$  可积;

$$2^\circ. \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f| d(\mu_1 - \mu_2) < \infty.$$

当  $f$  在  $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$  上可积时, 有

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

(5) 设  $f$  对  $\mu$  可积, 令

$$\gamma(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{F}$$

则  $\gamma \ll \mu$ ;

(6) 当  $\mu$  是  $\sigma$ -有限广义测度时, 拉东-尼古丁定理仍成立.

### § 6.3 勒贝格分解定理与 定分布函数的分解

我们先来引进和绝对连续性相对立的一种概念。

**定义 1** 设  $\mu$  和  $\nu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的两个广义测度, 如果存在两个不相交的可测集  $A$  与  $B$ , 使得  $\Omega = A + B$ , 且对任意的可测集  $E$ , 有

$$|\mu|(A \cap E) = |\nu|(B \cap E) = 0$$

则称  $\mu$  和  $\nu$  是相互奇异的, 也称  $\nu$  关于  $\mu$  (或  $\mu$  关于  $\nu$ ), 是奇异的, 记为  $\mu \perp \nu$ .

易知, 如果  $\mu$  与  $\nu$  为测度, 则  $\mu \perp \nu$  的充分必要条件是: 存在可测集  $A$ , 使得

$$\mu(A) = \nu(A') = 0$$

**例 1** 设  $\Omega$  是全体正整数所组成的集,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  中全体子集所组成的类,  $\mu$  是  $\mathcal{F}$  上恒等于 0 的测度,  $\nu$  的定义如下:

$$\nu(A) = A \text{ 中点的个数, } A \in \mathcal{F}$$

这时  $\mu(\{1\}) = 0$ , 而  $\nu(\{1\}) = 1$ , 故  $\nu$  对  $\mu$  不绝对连续, 但如取  $A = \Omega$ , 则

$$\mu(A) = \nu(A') = \nu(\phi) = 0$$

故有  $\mu \perp \nu$ .

**定理 1 (勒贝格分解定理)** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  是  $\sigma$ -有限测度空间,  $\nu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的  $\sigma$ -有限测度, 则必存在  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的  $\sigma$ -有限测度  $\nu_0$  和  $\nu_1$ , 使得

$$\nu = \nu_s + \nu_c$$

且  $\nu_s \perp \mu$ ,  $\nu_c \ll \mu$ ,  $\nu$  的上述分解是唯一的。

证 令  $\lambda = \mu + \gamma$ , 显然  $\lambda$  是  $\sigma$ -有限测度, 且  $\mu \ll \lambda$ , 于是由拉东-尼古丁定理知, 存在非负实值函数  $f$ , 使得对每个  $E \in \mathcal{F}$ , 有

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda$$

设

$$A = \{\omega \mid f(\omega) > 0\}, \quad B = \{\omega \mid f(\omega) = 0\},$$

$$\text{则 } A + B = \Omega, \text{ 且 } \mu(B) = \int_B f d\mu = 0$$

定义 2.1.10

$$\begin{aligned}(\tilde{\gamma}_c - \gamma_c)(E) &= (\tilde{\gamma}_c - \gamma_c)(E \cap B \cap \tilde{B}) \\ &= (\gamma_s - \tilde{\gamma}_s)(E \cap B \cap \tilde{B}) = 0\end{aligned}$$

从而有  $\gamma_c(E) = \tilde{\gamma}_c(E)$ , 由此及  $\gamma_s - \tilde{\gamma}_s = \gamma_c - \tilde{\gamma}_c$  即得  $\gamma_s(E) = \tilde{\gamma}_s(E)$ , 于是我们就证明了分解的唯一性.

下面我们将以上的定理应用于定分布函数的分解问题.

**定义 2** 设  $F(x)$  是定义在实数空间  $R$  上的实值函数, 若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 恒存在  $\delta > 0$ , 使得当  $R$  中任何有限个两两不相交的开区间  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  满足条件

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

时, 不等式

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon \quad (3.1)$$

恒成立, 则称  $F$  为  $R$  上的绝对连续函数.

注: 如果限制诸区间  $(a_k, b_k)$  在区间  $[a, b]$  中, 则得到在  $[a, b]$  绝对连续的概念.

显然, 绝对连续函数是在通常意义下的连续函数 (取  $n=1$ ). 但其逆不真, 详见下例.

**例 2** 令

$$F(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然  $F(x)$  是一连续函数, 下面我们要证明  $F(x)$  在区间  $[0, 1]$  内并不绝对连续.

设  $n$  与  $m$  是任意正整数, 令

$$a_k = \frac{1}{2(m+k)}, \quad b_k = \frac{1}{2(m+k)-1}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

则



$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \frac{1}{2m+1} \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(m+k)} \quad (3.3)$$

由于  $m$  可以任意大, 故由 (3.2) 知  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$  可以任意小,

由于  $n$  可任意大, 故由 (3.3) 知  $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)|$  可任意大, 由此可知,  $F(x)$  不绝对连续.

在以下的讨论中符号  $\mu$  恒等表示  $R$  中波莱尔集类  $\mathscr{B}$  上的勒贝格测度. 为确定起见, 以下当我们谈到  $\mathscr{B}$  上的有限测度  $\nu$  的分布函数时, 意指如下的定分布函数:

$$F(x) = \nu((-\infty, x])$$

**定理 2** 设  $\nu$  是  $(R, \mathscr{B})$  上的有限测度, 则  $\nu \ll \mu$  的充分必要条件是  $\nu$  的分布函数  $F(x)$  是  $R$  上的绝对连续函数.

**证** 先证充分性, 设  $F(x)$  绝对连续, 则对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\delta$ , 使得当  $R$  中任何有限个两两不相交的开区间  $(a_k, b_k) (k=1, 2, \dots, n)$  满足条件  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$  时, 有

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

设  $E \in \mathscr{B}$  且  $\mu(E) = 0$ , 由勒贝格测度性质易知, 存在两两不相交的半闭区间  $(a_k, b_k] (k=1, 2, \dots)$ , 使得  $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$ , 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta \quad (3.4)$$

由 (3.4) 知, 对任意正整数  $n$ , 恒有

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

因而

$$\gamma(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k]) = \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \varepsilon,$$

由于  $\varepsilon$  任意, 故有  $\gamma(E) = 0$ , 这就证明了  $\gamma \ll \mu$ .

下证必要性. 设  $\gamma \ll \mu$ , 则对于每一个正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\delta$ , 使得对于满足条件  $\mu(E) < \delta$  的任何波莱尔集  $E$ , 有  $\gamma(E) < \varepsilon$ . 由此知, 当  $R$  中任何有限个两两不相交的开区间  $(a_k, b_k) (k=1, 2, \dots, n)$  满足条件

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]\right) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^n \gamma((a_k, b_k]) \\ &= \gamma\left(\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

故  $F(x)$  绝对连续.

**定理 3** 设  $F(x)$  是绝对连续的定分布函数, 则存在非负实值勒贝格可积函数  $f$ , 使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f d\mu \quad (3.5)$$

其中  $f$  称为  $F$  的密度函数.

**证** 设  $\mu_F$  是  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度 (有限), 则  $F(x)$  是  $\mu_F$  的分布函数:

$$\mu_F((-\infty, x]) = F(x) \quad (3.6)$$

由定理 2,  $\mu_F \ll \mu$ . 于是由拉东-尼古丁定理知, 存在非负实值可积函数  $f$ , 使对每一  $E \in \mathcal{S}$ , 有

$$\mu_F(E) = \int_E f d\mu$$

令  $E = (-\infty, x]$  得

$$\mu_F((-\infty, x]) = \int_{(-\infty, x]} f d\mu \equiv \int_{-\infty}^x f d\mu \quad (3.7)$$

由 (3.6) 与 (3.7) 即得 (3.5) . 证毕.

**定义 3** 设  $F(x)$  是定分布函数, 如果存在非负勒贝格可积函数  $f$ , 使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f d\mu \quad (3.8)$$

则称  $F(x)$  是连续型分布函数,  $f$  称为  $F$  的密度.

**定理 4** 连续型分布函数一定绝对连续.

**证** 设  $f$  是  $F$  的密度, 令

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

则  $\nu$  是  $\mathcal{B}$  上的测度, 且  $\nu \ll \mu$ . 由 (3.8) 知,  $F(x)$  是  $\nu$  的分布函数, 于是由定理 2 知,  $F(x)$  是绝对连续函数.

由以上两个定理可知, 就定分布函数而言, 绝对连续性的概念与连续型的概念是一致的. 由于连续函数未必绝对连续, 所以连续的分布函数未必是连续型分布函数.

**定义 4** 设  $F(x)$  是定分布函数, 如果存在  $\mathbb{R}$  中的点列  $\{x_n\}$  及定义在其上的实值函数  $p(x_n)$ , 使得

$$F(x) = \sum_{x_n \leq x} p(x_n)$$

则称  $F(x)$  是离散型分布函数.

**引理 1** 任何定分布函数  $F$  都可以唯一地分解为

$$F = F_c + F_d$$

其中  $F_d$  为离散型分布函数,  $F_c$  是连续 (不一定是连续型) 的定分布函数.

**证** 因为  $F$  是增函数, 故它至多有可列个不连续点, 设为  $x_n (n=1, 2, \dots)$ . 令

$$p(x_n) = F(x_n) - F(x_n - 0) > 0 \quad (3.9)$$

$$F_d(x) = \sum_{x_n \leq x} p(x_n), \quad x \in \mathbb{R}$$

则  $F_d$  是离散型分布函数. 令

$$F_c = F - F_d, \quad x \in R$$

显然  $F = F_c + F_d$ , 且  $F_c$  是右连续函数。下面证明  $F_c$  是单增的左连续函数。对任意的  $x' < x$ , 有

$$\begin{aligned} F_c(x) - F_c(x') &= F(x) - F(x') - \sum_{x' < x_n \leq x} p(x_n) \\ &= F(x-0) - F(x') - \sum_{x' < x_n \leq x} p(x_n) \end{aligned} \quad (3.10)$$

由此有

$$\lim_{x' \rightarrow x-0} [F_c(x) - F_c(x')] = F(x-0) - F(x-0) = 0$$

即  $F_c$  是左连续的。由 (3.9) 与 (3.10) 可知, 对任意的  $x' < x$  有

$$\begin{aligned} F_c(x) - F_c(x') &= F(x) - F(x') - \sum_{x' < x_n \leq x} p(x_n) \\ &= [F(x) - F(x')] - \sum_{x' < x_n \leq x} [F(x_n) - F(x_n-0)] \geq 0 \end{aligned}$$

所以  $F_c$  是增函数, 从而证明了  $F_c$  是连续的分布函数。显然  $F_c$  还是定分布函数。

往证分解的唯一性。设  $F$  有两个分解式

$$F = F_c + F_d = \widetilde{F}_c + \widetilde{F}_d \quad (3.11)$$

其中  $F_c$  与  $\widetilde{F}_c$  是连续的定分布函数, 而  $F_d$  与  $\widetilde{F}_d$  是离散型分布函数。由 (3.11) 我们有

$$F_c - \widetilde{F}_c = \widetilde{F}_d - F_d$$

上式左边为连续函数, 右边为两个离散型分布函数之差, 由此容易证明这个差必须为零, 即我们有  $\widetilde{F}_d = F_d$ , 从而有  $\widetilde{F}_c = F_c$ 。

**定义 4** 如果有收敛于 0 的数列  $h_1, h_2, \dots$  ( $h_n \neq 0$ ), 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

存在 ( $\lambda$  可为无穷), 则称  $\lambda$  是函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的一个导出数, 记为

$$\lambda = Df(x_0)$$

易知, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  存在通常导数的充要条件是  $f(x)$  在

$x_0$  的一切导出数都相等；如果  $f(x)$  是单增函数，则其一切导出数都是非负的。

**定义 5** 设  $F(x)$  是连续的定分布函数，如果它的导数几乎处处（关于勒贝格测度  $\mu$  而言）等于 0，则称  $F(x)$  为奇异型分布函数。

**引理 2** 设  $\nu$  是  $\mathcal{B}$  上的勒贝格-斯提杰测度，其分布函数为  $F(x)$ ，如果  $\nu \perp \mu$ ，则  $F'(x)$  几乎处处（关于  $\mu$  而言）等于 0。

**证** 因为  $\nu \perp \mu$ ，故存在  $A \in \mathcal{B}$ ，使得

$$\nu(A) = \mu(A') = 0$$

令  $D = \{x \mid F'(x) = 0, x \in R\}$

则  $D' = \{x \mid \text{存在一个 } D(x) > 0, x \in R\}$

显然有， $D' = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ ，其中

$$D_n = \left\{ x \mid \text{存在一个 } D(x) > \frac{1}{n}, x \in R \right\}$$

如果  $\mu(D') > 0$ ，则存在正整数  $m$ ，使得

$$\mu(D_m) > 0$$

因为

$$\mu(D_m) = \mu(A \cap D_m) + \mu(A' \cap D_m)$$

而  $\mu(A' \cap D_m) = 0$ ，故有

$$\mu(A \cap D_m) > 0 \tag{3.12}$$

因为  $\nu(A) = 0$ ，可知对于任意的正数  $\varepsilon$ ，存在开集  $G$ ，使得

$$\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} > \frac{1}{m}$$

成立, 且  $[x, x+h_n] \subset G$  (此处我们用  $[\alpha, \beta]$ , 表示介于  $\alpha$  和  $\beta$  之间的全体实数, 不论  $\alpha \leq \beta$  或是  $\alpha > \beta$ )。记

$$d_n(x) = [x, x+h_n]$$

则

$$\gamma(d_n(x)) = |F(x+h_n) - F(x)| > \frac{|h_n|}{m} = \frac{1}{m} \mu(d_n(x)) \quad (3.13)$$

易见集  $A \cap D_n$  在维他利 (Vitali) 意义下被闭区间集

$$\mathcal{H} = \{d_n(x) | x \in A \cap D_n, n=1, 2, \dots\}$$

所覆盖, 于是根据维他利定理, 在  $\mathcal{H}$  中可以选出有限或可列个两两不相交的闭区间  $\delta_k (k=1, 2, \dots)$ , 使得

$$\mu(A \cap D_n - \sum_k \delta_k) = 0 \quad (3.14)$$

于是由 (3.13) 及 (3.14) 有

$$\begin{aligned} \mu(A \cap D_n) &\leq \sum_k \mu(\delta_k) < \sum_k m\gamma(\delta_k) \\ &= m\gamma\left(\sum_k \delta_k\right) \leq m\gamma(G) \leq m\varepsilon \end{aligned}$$

由于  $\varepsilon$  可任意小, 故有  $\mu(A \cap D_n) = 0$ , 这与 (3.12) 矛盾。因此必须有  $\mu(D') = 0$ , 从而有  $F'(x) = 0 \quad a.e. [\mu]$ 。

**推论** 设  $\gamma$  是  $\mathcal{B}$  上的有限测度, 其分布函数  $F(x)$  为连续函数, 如果  $\gamma \perp \mu$ , 则  $F(x)$  是奇异型分布函数。

**证** 这是因为  $\mathcal{B}$  上的有限测度的分布函数为定分布函数。

**定理 5** 任何定分布函数  $F$  都可唯一地分解为

$$F = F_d + F_{ac} + F_s,$$

其中  $F_d$  为离散型分布函数,  $F_{ac}$  为连续型分布函数,  $F_s$  为奇异型分布函数。



证 由引理 1,  $F$  可唯一地分解为

$$F = F_d + F_c \quad (3.15)$$

其中  $F_d$  为离散型分布函数,  $F_c$  为连续型分布函数. 用  $\gamma_c$  表示由  $F_c$  引出的勒贝格-斯提杰测度, 由勒贝格分解定理知,  $\gamma_c$  对勒贝格测度  $\mu$  可唯一地分解为

$$\gamma_c = \gamma_{ac} + \gamma_s \quad (3.16)$$

其中  $\gamma_{ac} \ll \mu$ ,  $\gamma_s \perp \mu$ , 再由拉东-尼古丁定理知, 存在非负实值勒贝格可积函数  $f$ , 使得对每个  $E \in \mathcal{B}$ , 有

$$\gamma_{ac}(E) = \int_E f d\mu$$

令

$$F_{ac}(x) = \gamma_{ac}((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F_s(x) = \gamma_s((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

则  $F_{ac}$  与  $F_s$  分别为  $\gamma_{ac}$  与  $\gamma_s$  的分布函数 (都是定分布函数), 且

$$F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x f d\mu$$

是连续型分布函数; 由 (3.16) 有

$$F_c = F_{ac} + F_s \quad (3.17)$$

由于  $F_c$  与  $F_{ac}$  为连续函数, 故  $F_s$  亦为连续函数, 由于  $F_s$  是  $\gamma_s$  的分布函数, 而  $\gamma_s \perp \mu$ , 故由引理 2 之推论知,  $F_s$  是奇异型分布函数. 由 (3.15) 及 (3.17) 即得

$$F = F_d + F_{ac} + F_s$$

最后我们给出构造不恒等于常数的奇异型分布函数的一种方法.

设  $0 < \lambda_n < 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且

$$\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \lambda > 0 \quad (3.18)$$

按照比例  $\lambda_1 : (1 - \lambda_1)$  将区间分成两个闭区间:

$$\delta_0 = [0, \lambda_1], \quad \delta_1 = [\lambda_1, 1]$$

这两个区间都称为一阶区间。一般地，按比例  $\lambda_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1})$  将每个  $n$  阶区间  $\delta_{x_1 \dots x_n} (x_i = 0, 1; i = 1, 2, \dots, n)$  都分成两个闭区间  $\delta_{x_1 \dots x_n 0}$  与  $\delta_{x_1 \dots x_n 1}$ ，就得到  $n+1$  阶区间，依此类推，显然我们有

$$\mu(\delta_{x_1 \dots x_n 0}) = \lambda_{n+1} \mu(\delta_{x_1 \dots x_n}) \quad (3.19)$$

对于由 0 与 1 组成的任意无限序列  $\{x_n\}$ ，令

$$\delta_{x_1 x_2 x_3 \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \delta_{x_1 \dots x_n}$$

显然对任意的  $x \in [0, 1]$ ，存在一个由 0 与 1 组成的序列  $\{x_n\}$ ，使得

$$x \in \delta_{x_1 x_2 x_3 \dots} \quad (3.20)$$

如果  $x$  是某个  $n$  阶区间的端点且  $x \neq 0$  与 1，则存在两个序列对应于  $x$ ，在这种情况下，我们假定 (3.20) 中的下标的尾部恒为 0。设  $x \in [0, 1]$  且由 (3.20) 表示，令

$$f(x) = 0.x_1 x_2 x_3 \dots \quad (\text{二进制小数}) \quad (3.21)$$

则我们得到定义在  $[0, 1]$  上的一个函数  $f(x)$  的单调性和连续性是显然的，下面我们来证明  $f'(x)$  几乎处处为 0 (相对  $\mu$  而言)。

任给  $0 < \varepsilon < 1$ ，由 (3.18)，存在正整数  $n$ ，使得

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k > 1 - \varepsilon$$

由 (3.18) 与 (3.19) 我们有

$$\begin{aligned} \mu(\delta_{x_1 \dots x_n 0 0 0 \dots}) &= \mu(\delta_{x_1 \dots x_n}) \prod_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \\ &> \mu(\delta_{x_1 \dots x_n}) (1 - \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.22)$$

于是  $\delta_{x_1 \dots x_n 0 0 0 \dots}$  是一个非退化区间，由 (3.21) 知，在此区间上  $f(x)$  取常值  $0.x_1 x_2 x_3 \dots$  (二进制小数)。由 (3.22) 我们有

$$\Sigma \mu(\delta_{x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots}) > \Sigma \mu(\delta_{x_1, \dots, x_n})(1 - \varepsilon) = \varepsilon \quad (3.23)$$

此处  $\Sigma$  表示对所有的  $x_i (1 \leq i \leq n)$  求和。因为  $\varepsilon$  可以任意小，故由 (3.23) 即可推出  $f$  在其上取常值的互不重叠的区间的长度之和为 1，于是我们就证明了  $f'(x)$  几乎处处为 0。显然  $f(x)$  在整个区间  $[0, 1]$  上并不恒等于常数。

### 习 题 6.3

1. 设  $\mu$  和  $\nu$  是两个广义测度，并且  $\nu$  对  $\mu$  既是绝对连续的又是奇异的，则  $\nu = 0$ 。

2. 设  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的测度， $\nu_1$  与  $\nu_2$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度，证明

(1) 如果  $\nu \perp \mu$ ,  $\nu_1 \perp \mu$ , 则  $(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu$ ;

(2) 如果  $\nu \ll \mu$ ,  $\nu_2 \perp \mu$ , 则  $\nu_1 \perp \nu_2$ 。

3. 设  $\mu$  是广义测度，则变差  $\mu^+$  与  $\mu^-$  是相互奇异的。

4. 在同一可测空间中给出测度  $\mu$  与  $\nu$  的一个例子，使得关系  $\mu \ll \nu$ ,  $\nu \ll \mu$ ,  $\mu \perp \nu$  均不成立。

5. 证明任何离散型分布函数  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度  $\mu_F$  对于勒贝格测度  $\mu$  是奇异的。

6. 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间，使得  $\Omega$  中的单点集  $(\omega)$  是可测集，设  $\nu$  与  $\mu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的  $\sigma$ -有限测度，则

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$

其中  $\nu_1 \ll \mu$ ,  $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$ ,  $\nu_i \perp \nu_j (i \neq j)$  且对于每个  $\omega \in \Omega$ ,  $\nu_3(\{\omega\}) = 0$ 。

7. 设  $\mu$  和  $\nu$  分别为  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的测度和有限广义测度， $A \in \mathcal{F}$ 。证明若  $\nu \perp \mu$  ( $\nu \ll \mu$ )，那么当  $\nu$  和  $\mu$  看成是  $(A, \mathcal{F} \cap A)$  上的测度和有限广义测度时亦有  $\nu \perp \mu$  ( $\nu \ll \mu$ )。

8. 设  $\nu$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的广义测度，试问在什么条件下有  $\nu \perp \nu$ ?

9. 证明任何奇异型分布函数  $F(x)$  引出的勒贝格-斯提杰测度对勒贝格测度是奇异的。

10. 设  $F(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的导数，证明  $F(x)$  在  $[a, b]$  上绝对连续。

11. 证明不恒等于 0 的奇异型分布函数不可能绝对连续。

## 参 考 书 目

- [ 1 ] P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, 1950 (中译本: 测度论, 科学出版社, 1980) .
- [ 2 ] И. П. Натансон. Теория Функций Вещественной Переменной, 1950 (中译本: 实变函数论, 人民教育出版社, 1958) .
- [ 3 ] 朱成熹, 测度论基础, 科学出版社, 1983.
- [ 4 ] 周性伟, 抽象分析引论, 科学出版社, 1983.
- [ 5 ] 中山大学概率论教研室, 测度与概率基础, 广东科技出版社, 1981.
- [ 6 ] 夏道行等, 实变函数论与泛函分析 (上册), 人民教育出版社, 1978.
- [ 7 ] 王梓坤, 随机过程论, 科学出版社, 1965.
- [ 8 ] 王梓坤, 概率论基础及其应用, 科学出版社, 1976.
- [ 9 ] 杨宗磐, 概率论入门, 科学出版社, 1981.
- [ 10 ] 严士健等, 概率论基础, 科学出版社, 1982.
- [ 11 ] Kai Lai Chung, A Course in Probability Theory, Academic Press, INC. 1974.
- [ 12 ] R. B. Ash, Real Analysis and Probability, Academic Press, INC., 1972.
- [ 13 ] G. De Barra, Measure Theory and Integration, Ellis Horwood Limited, 1981.
- [ 14 ] Yuan Shih Chow and Henry Teicher, Probability

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**



**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**



**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**



**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**



**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**



**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**

**Theory, Springer-verlag, 1978.**

**[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.**

**[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.**